



# ALFONSO UGARTE SCHOOL

*Never stop learning because life never stops teaching*

**Aritmética**  
**Segundo Año**





# MCM – MCD I

## Capítulo 13

### Máximo común divisor (MCD)

Es el mayor número entero positivo que divide exactamente a un conjunto de números enteros positivos.

Observa con atención:

| Num. | Divisores                            |
|------|--------------------------------------|
| 24   | 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24      |
| 48   | 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24 ; 48 |
| 36   | 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36 |

Los divisores comunes de:

24; 42 y 36  $\Rightarrow$  1; 2; 3; 4; 6 y 12.

El MCD es 12.

Los divisores de 12 son  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ y } 12 \\ 2 \text{ y } 6 \\ 3 \text{ y } 4 \end{array} \right.$

Son los divisores comunes de 24; 48 y 36

### Mínimo común múltiplo (MCM)

Es el menor número entero positivo que es múltiplo común de un conjunto de número también enteros positivos.

| Num. | Múltiplos positivos                            |
|------|------------------------------------------------|
| 15   | 15; 30; 45; 60; 75; ...; 120; ...; 180         |
| 10   | 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; ...; 120; ...; 180 |
| 20   | 20; 40; 60; 80; ...; 120; ...; 180             |

Los múltiplos comunes son: 60, 120; 180; ...

El MCM es 60.

### Método de cálculo

#### 1. Mediante descomposición simultánea

Para calcular el MCD de un conjunto de números enteros positivos, se extraen todos los

factores primos comunes, luego se multiplican dichos factores primos.

Ejemplo:

Calcula el MCD de 60; 80 y 140.

|      |    |     |   |                           |
|------|----|-----|---|---------------------------|
| 60   | 80 | 140 | 2 | } Factores primos comunes |
| 30   | 40 | 70  | 2 |                           |
| 15   | 20 | 35  | 5 |                           |
| 3    | 4  | 7   |   |                           |
| PESI |    |     |   |                           |

$$\text{MCD} = 2 \times 5 = 20$$

Para obtener el MCM de un conjunto de números enteros positivos, extraemos los factores primos comunes y no comunes hasta obtener la unidad en cada caso.

Ejemplo:

Calcula el MCM de 60; 80 y 140

|    |    |     |   |
|----|----|-----|---|
| 60 | 80 | 140 | 2 |
| 30 | 40 | 70  | 2 |
| 15 | 20 | 35  | 2 |
| 15 | 10 | 35  | 2 |
| 15 | 5  | 35  | 5 |
| 5  | 5  | 7   | 5 |
| 1  | 1  | 7   | 7 |
| 1  | 1  | 1   | 1 |

$$\text{MCM} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$$

#### 2. Mediante la descomposición canónica

Luego de realizar la descomposición canónica de cada número:

El MCD se obtiene al multiplicar los factores primos comunes elevados en sus menores exponentes.

El MCM se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes elevados en su mayores exponentes.

Ejemplos:

Calcula el MCD y MCM de 100; 180 y 120.

Realizamos la descomposición canónica de dichos números

|     |   |     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|-----|---|
| 100 | 2 | 180 | 2 | 120 | 2 |
| 50  | 2 | 90  | 2 | 60  | 2 |
| 25  | 5 | 45  | 3 | 30  | 2 |
| 5   | 5 | 15  | 3 | 15  | 3 |
| 1   |   | 5   | 5 | 5   | 5 |
|     |   | 1   |   | 1   |   |

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 = 2^2 \times 5^2 \\ 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{array} \right.$$

$$\text{MCD} = 2^2 \times 5 = 20$$

Producto de los factores  
primos comunes elevados  
a sus menores exponentes.

$$\text{MCM} = 2^3 \times 5^2 \times 3^2 = 1800$$

Producto de los factores  
primos comunes y no  
comunes elevados a sus  
mayores exponentes.

## Trabajando en clase

### Integral

- Calcula:  $A + B$ .  
Si  $A = \text{MCD}(50; 40)$  y  $B = \text{MCM}(70; 30)$
- Calcula el MCD(A; B; C) y da como respuesta la suma de sus cifras.  
 $A = 4 \times 6 \times 15$   
 $B = 8 \times 18 \times 21$   
 $C = 2 \times 12 \times 33$
- Calcula el MCD y el MCM de A y B.  
 $A = 2^4 \times 3^2 \times 5^6$  y  $B = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11$

### PUCP

- ¿Cuál es el mayor número que divide exactamente a 50 y 165?  
**Resolución:**  
 $50: 25 \times 2$   
 $165: 3 \times 5 \times 11$   
Piden MCD = 5  
 $\therefore \text{MCD}(50; 165) = 5$
- ¿Cuál es el mayor número que divide a 60 y 180?
- Si el  $\text{MCM}(3A; 2A) = 36$ , calcula:  $\frac{\sqrt{6A}}{2}$

- Si  $\text{MCD}(17A; 23A) = 16$

Calcula:

$$\frac{\sqrt{A} + \sqrt{36}}{5}$$

### UNMSM

- Si  $\text{MCM}(69P; 18Q; 24R) = 90$   
Determina:  $\text{MCM}(9P; 3Q; 4R)$   
**Resolución:**  
 $\text{MCM}(\frac{36P}{6}; \frac{18Q}{6}; \frac{24R}{6}) = \frac{90}{6}$   
 $\Rightarrow \text{MCM}(6P; 3Q; 4R) = 15$

- Si  $\text{MCD}(90A; 225B) = 360$   
Calcula:  $\text{MCD}(2A; 5B)$

- Si en los números:

$$A = 2^{10} \times 3^6 \times 5^4 \times 7 \times 11^2$$

$$B = 2^8 \times 3^8 \times 5^3 \times 7^4 \times 11^3$$

Se cumple que:

$$\text{MCD}(A; B) = 2^C \times 3^E \times 5^S \times 7^A \times 11^R$$

Calcula:  $C + E + S + A + R$

11. Si el  $\text{MCM}(2k; 8k; 12k) = 72$   
Calcula el valor de «k»

UNI

12. Calcula «n» si A y B poseen 20 divisores comunes.

$$A = 12^n \times 10$$

$$B = 10^n \times 12$$

Resolución:

$$A = 12^n \times 10 = 2^{2n+1} \times 3^n \times 5$$

$$B = 10^n \times 12 = 2^{n+2} \times 3 \times 5^n$$

$$\text{MCD} = 20 \Rightarrow 2^{n+2} \times 3 \times 5$$

$$20 = (n+3)(2)(2)$$

$$5 = n + 3$$

$$2 = n$$

13. Determina el valor de «n» si el MCM de A y B tiene 352 divisores:

$$A = 72^n \times 750$$

$$B = 4 \times 90^n$$

14. Determina el valor de

$$(a + b + c)^2$$

$$\text{Si: } 2^a 5^b 11^c = 5500$$

## Esquema formulario

MCD: es el mayor divisor común de un grupo de números.

MCM: es el mínimo múltiplo común de un grupo de números.

Ejemplo:

Calcula el MCD y el MCM de 60 y 124

### MÉTODO DE CÁLCULO

#### Descomposición simultánea

|    |     |    |       |
|----|-----|----|-------|
| 60 | 124 | 2  | } MCD |
| 30 | 62  | 2  |       |
| 15 | 31  | 5  | } MCM |
| 3  | 31  | 3  |       |
| 1  | 31  | 31 |       |
| 1  | 1   |    |       |

#### Descomposición canónica

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$124 = 2^2 \times 31$$

$$\text{MCD} = (60; 124) = 2^2 = 4$$

$$\text{MCM} = (60; 124) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 31 = 1860$$

## Sigo Practicando

16. Calcula  $A + B$  si  $A = \text{MCD}(20; 30)$ ;  $B(30; 40)$

- a) 100      c) 120      e) 130  
b) 900      d) 80

17. Calcula el  $\text{MCD}(A; B)$

$$A = 25 \times 3 \times 8$$

$$B = 21 \times 5 \times 7$$

- a) 16      c) 17      e) 25  
b) 15      d) 3

18. Calcula el  $\text{MCD}$  y el  $\text{MCM}$  de  $A$  y  $B$  y da como respuesta la suma de cifras de  $\text{MCD} \times \text{MCM}$ , si:

$$A = 2^4 \times 5^3 \times 7$$

$$B = 5 \times 7^2$$

- a) 12      c) 11      e) 9  
b) 20      d) 10

19. Si  $\frac{A}{B} = \frac{5}{7}$  y  $\text{MCD}(A; B) = 12$

calcula el mayor de los números.

- a) 51      c) 48      e) 84  
b) 36      d) 24

20. Si  $\text{MCD}(7B; 8B) = 36$ , calcula:

$$\frac{\sqrt{B+1}}{7}$$

- a) 3      c) 1      e)  $1/2$   
b) 7      d)  $1/7$

21. Si  $\frac{A}{B} = \frac{4}{3}$  y  $\text{MCM}(A; B) = 72$ , calcula el menor de los números.

- a) 18      c) 12      e) 36  
b) 19      d) 19

22. Para los números  $A = 2400$  y  $B = 4950$ , el valor de  $\text{MCM}(A; B) \text{ MCD}(A; B)$  es:

- a) Mayor que 1056      d) 2640  
b) Menor que 264      e) 528  
c) 1056

23. ¿Cuál es el mayor número que divide exactamente a 85 y 150?

- a) 10      c) 15      e) 3  
b) 5      d) 7

24. Calcula:  $a^b$

$$A = 2^5 \times 3^2 \times 5^4$$

$$B = 2^6 \times 3 \times 7$$

$$\text{Si } \text{MCD}(A; B) = 2^a \times 3^b$$

- a) 7      c) 9      e) 16  
b) 6      d) 5

25. Si  $\text{MCM}(24k; 18k; 12k) = 360$ , determina el mayor de los números.

- a) 360      c) 240      e) 120  
b) 150      d) 180

## • Tarea

### Integral

- Calcula  $A + B$  si:  
 $A = \text{MCD}(60; 70; 100)$   
 $B = \text{MCM}(50; 60)$   
 a) 300                      c) 350                      e) 25  
 b) 40                        d) 340
- Calcula el  $\text{MCD}(A; B; C)$  y da como respuest la suma de cifras.  
 $A = 8 \times 6 \times 15$   
 $B = 21 \times 9 \times 2^3$   
 $C = 33 \times 5 \times 3 \times 2$   
 a) 8                        c) 10                        e) 5  
 b) 7                        d) 9
- Calcula el  $\text{MCD}$  y el  $\text{MCM}$  de  $A$  y  $B$   
 $A = 2^2 \times 3^3 \times 5$   
 $B = 2^3 \times 5$   
 y da como respuesta  $\text{MCD} \times \text{MCM}$   
 a) 21 600                      c) 21 650                      e) 31 600  
 b) 22 500                      d) 11 550
- Existen dos números que son entre sí como 30 es a 48 y cuyo  $\text{MCD}$  es 21. ¿Cuál es uno de ellos?  
 a) 85                        c) 150                        e) 168  
 b) 100                        d) 186

### PUCP

- Si  $\text{MCD}(5B, 7B) = 25$ , calcula:

$$\frac{\sqrt{25} + \sqrt{B}}{5}$$

- a) 1                        c) 5                        e) 15  
 b) 2                        d) 10

- Calcula  $A^2 + 1$  si el  $\text{MCM}(28A; 29A) = 2436$   
 a) 3                        c) 10                        e) 15  
 b) 5                        d) 11
- Calcula el valor de  $\text{MCM}$  de  $15^{2n}$  y  $20^n$   
 a)  $300^n$                       c)  $50^n$                       e)  $450^n$   
 b)  $100^n$                       d)  $900^n$
- Calcula  $a + b$  si  $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$   
 $\text{MCD}(a; b) = 20$   
 a) 110                        c) 100                        e) 1221  
 b) 220                        d) 200

### UNMSM

- Si en los números:  
 $A = 2^3 \times 3^4 \times 7^5 \times 11^6$   
 $B = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$   
 Se cumple que:  $\text{MCD}(A; B) = 2^a \times 3^b \times 7^c$   
 calcula:  $a + b + c$   
 a) 4                        c) 5                        e) 7  
 b) 8                        d) 10
- Si el  $\text{MCM}(24k; 18k; 12k) = 480$ , calcula el mayor de los números  
 a) 1200                      c) 220                      e) 240  
 b) 160                      d) 180
- Determina la cantidad de divisores comunes:  
 $A = 10^3 \times 15^2$   
 $B = 20^3 \times 2^2$   
 $C = 2^3 \times 12$   
 a) 8                        c) 10                        e) 17  
 b) 9                        d) 5

12. ¿Cuántos divisores comunes tiene 240 y 180?

- a) 9                      c) 16                      e) 20  
b) 7                      d) 12

## UNI

13. Determina el valor de «n» si el MCM de A y B tiene 54 divisores.

$$A = 12^n \times 3$$

$$B = 3^n \times 6$$

- a) 3                      c) 6                      e) 4  
b) 7                      d) 5

14. Calcula «n», si:

$$A = 25^n \times 15$$

$$B = 15^n \times 25$$

$$\text{MCM}(A; B) = 32$$

- a) 5                      c) 2                      e) 4  
b) 7                      d) 3

15. Calcula  $\text{MCD}(91x; 78y)$

$$\text{MCD}(77x; 66y) = 110$$

- a) 104                      c) 156                      e) 146  
b) 130                      d) 117





# MCM – MCD II

## Capítulo 14

### PROPIEDADES COMPLEMENTARIAS

Dados 2 números A y B, se cumple que:

$$\text{MCD}(A; B) \times \text{MCM}(A; B) = A \times B$$

Dados 2 números consecutivos

A y A + 1, se cumple que:

$$\begin{aligned} \text{MCD}(A; A + 1) &= 1 \\ \text{MCM}(A; A + 1) &= A(A + 1) \end{aligned}$$

Dados 2 números A y B, de modo que A es múltiplo de B, se cumple que:

$$\text{MCD}(A; B) = B \quad \text{MCM}(A; B) = A$$

### ALGORITMO DE EUCLIDES

Llamado también «Método de las divisiones sucesivas», se utiliza únicamente para calcular el MCD de 2 números.

Se divide el mayor de los números por el menor. Si la división resulta exacta, diremos que el menor número es el MCD.

Si la división resulta inexacta, seguimos dividiendo; esta vez, el número menor por el residuo obtenido y así sucesivamente, hasta encontrar la división exacta.

Ejemplo:

Calcula el MCD de 1170 y 480

Resolución:

|      |           |       |      |      |     |
|------|-----------|-------|------|------|-----|
|      | Cocientes |       |      |      |     |
|      | 2         | 2     | 3    | 2    |     |
| 1170 | ÷ 480     | ÷ 210 | ÷ 60 | ÷ 30 | MCD |
|      | 210       | 60    | 30   | 0    |     |
|      | Residuos  |       |      |      |     |

Podemos observar que:

$$1170 = 480 \times 2 + 210$$

$$480 = 210 \times 2 + 60$$

$$210 = 60 \times 3 + 30$$

$$60 = 30 \times 2$$

## Trabajando en clase

### Integral

- Si el MCD de dos números es 11 y su MCM es 55, calcula el producto de dichos números
- EL MCM de dos números es 240 y su MCD es 2, Si uno de los números es 16, ¿cuál es el otro?
- Calcula el MCM de 300 y 108 usando el algoritmo de Euclides e indica la suma de los cocientes obtenidos.

### PUCP

- Los cocientes obtenidos al efectuar el algoritmo de Euclides de dos números son: 3; 2; 2 y 4, calcula el mayor de los números si su MCD es 5.

### Resolución:

|     |     |    |    |   |
|-----|-----|----|----|---|
|     | 3   | 2  | 2  | 4 |
| 375 | 110 | 45 | 20 | 5 |
|     | 45  | 25 | 5  | 0 |

Mayor: 375

- El MCD de dos números es 8 y los cocientes de las divisiones sucesivas para dicho MCD son 2; 2; 1; 1; y 7. Determina la diferencia de dichos números.
- Si el MCM de dos números PESI es 165, ¿cuál es el producto de dichos números?
- Determina la suma de dos números PESI si su diferencia es 1 y su MCM, 56.

## UNMSM

8. Calcula  $2A$ ; si  $\text{MCM}(A; A+1) = 56$ .

Resolución:

Dato:

$$\text{MCM}(A; A+1) = 56$$

Del dato: se observa que  $A$  y  $A+1$  son números consecutivos, por lo tanto:

$$\text{MCD}(A; A+1) = 1$$

Se sabe que:

$$\text{MCD}(A; A+1) \times \text{MCM}(A; A+1) = A \cdot (A+1)$$

Reemplazando valores:

$$1 \times 56 = A(A+1)$$

$$7 \times 8 = A(A+1)$$

$$A = 7$$

$$\text{Nos piden: } x = 2A$$

$$x = 2(7)$$

$$x = 14$$

9. Calcula  $3x$  si  $\text{MCM}(x; x+1) = 72$

10. La suma de dos números es 760 y los cocientes obtenidos al calcular el MCD por el algoritmo de Euclides fueron: 4; 2 y 3. Calcula dicho MCD.

11. Si  $M > 2$ , calcula

$$\text{MCD}[(m-2)1a; (m-2)1(a+1)]$$

## UNI

12. Calcula  $A \times B$

$$\text{MCD}(2A; 3B) = \frac{12}{k} \quad \text{MCM}(2A; 3B) = 60k$$

Resolución:

$$\text{MCD}(2A; 3B) = \frac{12}{k}$$

$$\text{MCM}(2A; 3B) = 60k$$

Se sabe que:

$$\text{MCD}(2A; 3B) \times \text{MCM}(2A; 3B) = (2A)(3B)$$

$$\frac{12}{k} (60k) = 2A \times 3B$$

$$A \times B = 120$$

13. Calcula  $A \times B$ , si:  $\text{MCD}(5A; 2B) = \frac{25}{k}$   
 $\text{MCM}(5A; 2B) = 16k$

14. Calcula « $a + b$ »; si al calcular el MCD de  $\overline{2bb7}$  y  $\overline{aaa}$  por el algoritmo de Euclides se obtuvieron los siguientes cocientes: 3; 2; 1 y 2.

## Esquema formulario

## Propiedades complementarias

Dados 2 números  $A$  y  $B$ , se cumple que:

$$\text{MCD}(A; B) \times \text{MCM}(A; B) = A \times B$$

Dados 2 números consecutivos:

$$\text{MCD}(A; A+1) = 1$$

$$\text{MCM}(A; A+1) = A(A+1)$$

## Sigo Practicando

16. Calcula el producto de dos números si su MCD es 100 y su MCM es 1000.  
 a) 100 000      c) 100      e) N. A.  
 b) 1000      d) 10 000
17. El MCM de dos números es 200 y su MCD es 4. Si uno de ellos es 8, ¿cuál es el otro?  
 a) 10      c) 40      e) N. A.  
 b) 100      d) 80
18. Calcula el MCD de 228 y 84 por el algoritmo de Euclides. Da como respuesta la suma de los cocientes obtenidos.  
 a) 5      c) 7      e) 9  
 b) 6      d) 8
19. Calcula el MCD (32; 24; 8; 16; 64; 40)  
 a) 1      c) 8      e) 4  
 b) 2      d) 6
20. Calcula el producto de dos números PESI si su MCM es 272.  
 a) 272      c) 17      e) N.A.  
 b) 270      d) 16
21. ¿Cuáles son los dos números primos entre sí cuyo MCM es 224 y su diferencia es 25?  
 a) 15 y 40      c) 7 y 32      e) 14 y 39  
 b) 12 y 37      d) 10 y 35

22. Calcula el MCM (30; 24; 5; 120; 60; 40)

- a) 5                      c) 40                      e) 120  
b) 30                    d) 32

23. Calcula:  $A \times B$

$$\text{MCD}(6A; 10B) = 24$$

$$\text{MCM}(9A; 15B) = 135$$

- a) 31                      c) 18                      e) 36  
b) 26                    d) 24

24. La suma de dos números es 340 y los cocientes obtenidos al calcular el MCD por el algoritmo de Euclides fueron 1; 2 y 3. Calcula dicho MCD.

- a) 10                      c) 30                      e) N. A.  
b) 20                    d) 40

25. Si  $a > 2$ , calcula  $\text{MCD}[(a-2)2a; (a-2)2(a+1)]$

- a) 2                      c) 4                      e) N.A.  
b) 1                    d) 5

## • Tarea

### Integral

- Si el MCD de dos números es 18 y su MCM es 27, calcula el producto de dichos números.  
a) 400                      c) 486                      e) N. A.  
b) 200                      d) 500
- El MCM de dos números es 175 y su MCD es 6. Si uno de ellos es 25, ¿cuál es el otro?  
a) 48                      c) 56                      e) 24  
b) 28                      d) 42
- Calcula el MCD de 1457 y 434 por el algoritmo de Euclides; da como respuesta la suma de los cocientes obtenidos.  
a) 10                      c) 12                      e) 17  
b) 11                      d) 13
- Si  $\text{MCD}(a+1; a+2) = p^3 - 7$ ; calcula  $2p$   
a) 1                      c) 3                      e) 5  
b) 2                      d) 4

### PUCP

- Si el MCM de dos números PESI es 156, ¿cuál es el producto de dichos números?  
a) 111                      c) 136                      e) 146  
b) 156                      d) 144
- Determina dos números PESI cuya diferencia es 7 y su MCM es 330.  
a) 55 y 46                      c) 13 y 35                      e) 14 y 21  
b) 22 y 29                      d) 22 y 15
- Calcula:  $x + y$   
 $x = \text{MCD}(A; B)$ ; además  $A = 5B$   
 $y = \text{MCM}(A; B)$ ; además  $A = 3B$   
Da la respuesta en función de B.  
a) B                      c) 3B                      e) N.A.  
b) 2B                      d) 4B

- Calcula el  $\text{MCM}(x; y)$ , si  $\text{MCD}(x; y) = x$   
a) x                      c) xy                      e) N.A.  
b) y                      d) x/y

### UNMSM

- La suma de dos números es 2604 y los cocientes obtenidos al calcular el MCD por el algoritmo de Euclides fueron 2; 3; 5 y 8. Calcula dicho MCD.  
a) 6                      c) 12                      e) 20  
b) 18                      d) 14
- Si:  $A > 3$ , calcula el MCD:  
 $\frac{[(a-3)4(b+1)]}{(a-3)4b}$   
a) 4                      c) 1                      e) 6  
b) 6                      d) 3
- Calcula el MCD de 138 y 78 por divisiones sucesivas, e indica la suma del mayor cociente y el mayor residuo.  
a) 48                      c) 63                      e) 81  
b) 52                      d) 72
- El MCM de dos números es 630. Si su producto es 3780, ¿cuál es su MCD?  
a) 15                      c) 6                      e) 9  
b) 12                      d) 10

### UNI

- Calcula  $A \times B$ ; si  
 $\text{MCD}(4A; 2B) = 8/k$   
 $\text{MCM}(4A; 2B) = 15k$   
a) 10                      c) 7                      e) 15  
b) 6                      d) 8

14. Calcula  $a + b + c$ , si al calcular el MCD de  $\overline{a(a+4)a}$  y  $\overline{(a+4)bc}$ , por el algoritmo de Euclides, se obtuvieron los siguientes cocientes: 1;1;1 y 3.
- a) 12                      c) 14                      e) 16  
b) 13                      d) 15
15. La suma de dos números es 445 y los cocientes obtenidos al calcular el MCD por divisiones sucesivas fueron 2; 1; 2; 2 y 3. Determina el valor de MCD.
- a) 9                      c) 6                      e) 15  
b) 5                      d) 8



# NÚMEROS RACIONALES I

## Capítulo 15

### I. Concepto

Es un conjunto de números que pueden representarse como el cociente de 2 números enteros, donde el divisor debe ser distinto de cero. Es decir:

$$\frac{a}{b} = \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$b \in \mathbb{Z}$$

$$b \neq 0$$

### II. Fracción

Llamaremos fracción a toda expresión de las formas:

$$\frac{N}{D} \rightarrow \text{numerador} ; \text{donde: } N \in \mathbb{Z}$$

$$D \rightarrow \text{denominador} \quad D \in \mathbb{Z}$$

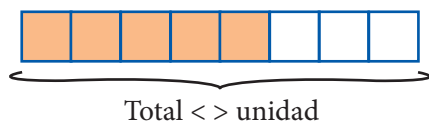
$$D \neq 0$$

y además N no es divisible por D.

Ejemplo:  $\frac{5}{8}$  se lee: «cinco octavos»

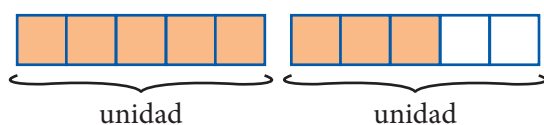
Es decir, que la unidad ha sido dividida en 8 partes iguales y de ellas hemos tomado 5 partes.

Representación gráfica:



Ejemplo:  $\frac{8}{5}$  se lee: «ocho quintos»

Es decir, la unidad ha sido dividida en 5 partes iguales, pero como necesitamos 8 partes de ese tipo, debemos considerar otra unidad.



### 1. Clases de fracción

Sea la fracción  $\frac{N}{D}$

#### a. Por comparación de sus términos

| Propia                                                   |
|----------------------------------------------------------|
| $\frac{N}{D} < 1$ , es decir $N < D$                     |
| $\frac{2}{7}; \frac{5}{9}; \frac{13}{15}; \frac{20}{49}$ |
| Impropia                                                 |
| $\frac{N}{D} > 1$ , es decir $N > D$                     |
| $\frac{9}{2}; \frac{11}{3}; \frac{15}{4}; \frac{40}{3}$  |

#### b. Por divisores comunes entre sus términos

| Reducible                                                 |
|-----------------------------------------------------------|
| Si N y D no son PESI                                      |
| $\frac{3}{9}; \frac{16}{20}; \frac{15}{25}; \frac{8}{24}$ |
| Irreducible                                               |
| Si N y D son PESI                                         |
| $\frac{13}{11}; \frac{9}{2}; \frac{15}{4}; \frac{17}{3}$  |

#### c. Por el denominador de un grupo de fracciones

| Homogéneas                                                |
|-----------------------------------------------------------|
| Igual denominador                                         |
| $\frac{5}{13}; \frac{8}{13}; \frac{9}{13}; \frac{15}{13}$ |
| Heterogéneas                                              |
| Diferente denominador                                     |
| $\frac{3}{8}; \frac{2}{9}; \frac{13}{5}; \frac{7}{12}$    |

## 2. Homogeneización de fracciones

Homogeneiza:  $\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{1}{6}$ 

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{2} \quad \frac{4}{9} \times \frac{2}{2} \quad \frac{1}{6} \times \frac{3}{3}$$

Finalmente, tenemos:  $\frac{12}{18} \quad \frac{8}{18} \quad \frac{3}{18}$ 

## 3. Número mixto

$$\bullet \quad \frac{25}{7} = 3 \frac{4}{7}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 7} \\ 4 \end{array}$$

$$\bullet \quad 3 \frac{4}{7} = \frac{25}{7}$$

## 4. Comparación de fracciones

$$\bullet \quad \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \rightarrow \frac{2}{5} < \frac{4}{7}$$

$$\bullet \quad \frac{13}{2} \times \frac{14}{3} \rightarrow \frac{13}{2} > \frac{14}{3}$$

## 5. Fracciones equivalentes

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6} \times \frac{4}{4} = \frac{16}{24} \times \frac{3}{3} = \frac{48}{72}$$



## Trabajando en clase

## Integral

1. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor?

- a)  $\frac{3}{5}$       c)  $\frac{5}{8}$       e)  $\frac{6}{11}$   
 b)  $\frac{2}{7}$       d)  $\frac{4}{7}$

2. Resuelve:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8} + \frac{13}{8} - \frac{4}{8}$$

3. Resuelve:

$$\frac{12}{3} + \frac{4}{15} + \frac{3}{5}$$

## Católica

4. ¿Qué fracción representa 26 de 39?

Resolución:

$$f = \frac{\text{lo que haré de parte}}{\text{lo que haré de total}} = \frac{26}{39} = \frac{2}{3}$$

«de...»

5. ¿Qué fracción representa 17 de 51?

6. Al simplificar una fracción, se obtiene  $\frac{2}{9}$ . Si se

sabe que la suma de los términos de la fracción es 55, calcula la diferencia de los mismos.

7. ¿Cuál es el número cuyo  $\frac{5}{7}$  es 75?

## UNMSM

8. Si una botella de gaseosa de litro y cuarto de capacidad está con líquido hasta sus  $\frac{4}{5}$ , ¿cuántos litros de gaseosa tenemos?

Resolución:

$$\frac{4}{5} \left( 1 \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{4}{5} \left( \frac{5}{4} \right)$$

Rpta.: 1 litro

9. Si una botella de vino de dos litros y cuarto de capacidad está llena hasta sus  $\frac{4}{9}$ , ¿cuántos litros de vino tenemos?10. Me deben los  $\frac{3}{7}$  de S/. 252. Si me pagan  $\frac{1}{9}$  de S/. 252, ¿cuánto me deben?11. Un alumno pesa 16 kg más los  $\frac{3}{7}$  de su peso total, ¿cuánto pesa dicho alumno?

## UNI

12. Si del dinero que tenía gasté la mitad, luego gasté la tercera parte de lo que me quedaba y por último gasté los S/. 12 que me quedaba, ¿cuánto tenía al inicio?

Resolución:

Tenía «x»

Gasté:  $\frac{1}{2}$ ; me queda:  $\frac{1}{2}$

Gasté:  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)$ ; me queda:  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} x = 12$

$$x = 36$$

Rpta.: 36

13. Si gasto los  $\frac{3}{7}$  de los  $\frac{4}{3}$  de mi dinero, ¿qué parte de lo que gasté es lo que me queda?

14. Un caño llena una piscina en 4 horas y otro caño llena la misma piscina en 6 horas. Si ambos caños se abren a la vez, calcula en cuánto tiempo se llena la piscina.



## Esquema formulario

### Números racionales I

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

conjunto de los números racionales

#### Números fraccionarios

Son números racionales que no son enteros.

Ejemplos:

$$-\frac{1}{4}; \frac{5}{6}; \frac{13}{4}$$

#### Comparación de números racionales

Dados  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  donde  $b$  y  $d \neq 0$

Por regla de productos cruzados:

$$a \times d \leftarrow \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \rightarrow b \times c$$

Si  $a \times d > b \times c$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Si  $a \times d = b \times c$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Si  $a \times d < b \times c$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

#### Fracción

$$F = \frac{a}{b} \begin{cases} a \in \mathbb{N} & b \neq 0 \\ b \in \mathbb{N} & a \neq b \end{cases}$$

$a \rightarrow$  numerador (parte)  
 $b \rightarrow$  denominador (todo)

Ejemplo:

$$\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; \frac{15}{2}$$

#### Número mixto

$$\text{Parte entera} \leftarrow 3 \frac{7}{8} = 3 + \frac{7}{8}$$

Parte fraccionaria

#### Transformación a mixto

Dado  $\frac{a}{b}$ ;  $a > b$

Dividimos:

$$a \overline{) b} \rightarrow \text{cociente}$$

$$\text{residuo} \rightarrow r \quad q$$

$$\text{Entonces: } \frac{a}{b} = q \frac{r}{b}$$

$q$ : parte entera

$\frac{r}{b}$ : parte fraccionaria

#### Transformación de mixto a fracción

$$q \frac{r}{b} \left\} \text{número mixto}$$

$$\text{Entonces: } q \frac{r}{b} = \frac{b \times q + r}{b}$$

#### Clasificación de fracciones: sea $F = N/D$

Según la comparación de sus términos:

F. propia:  $N < D$ ;  $F < 1$

F. impropia:  $N > D$ ;  $F > 1$

Según los divisores de sus términos

F. reducible:  $N$  y  $D$  no son PESI.

F. irreducible:  $N$  y  $D$  son PESI.

Según los denominadores

F. homogéneas

F. heterogéneas

Según el denominador

F. decimales:  $D = 10^n$ ;  $n \in \mathbb{Z}^+$

F. ordinarias:  $D \neq 10^n$ ;  $n \in \mathbb{Z}^+$

## Sigo practicando

16. ¿Cuál de las siguientes fracciones es menor?

- a)  $\frac{2}{25}$       c)  $\frac{4}{10}$       e)  $\frac{5}{14}$   
 b)  $\frac{2}{35}$       d)  $\frac{2}{5}$

17. Calcula:  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{4}{5}$  de 105.

- a) 12      c) 14      e) 16  
 b) 13      d) 15

18. Resuelve:  $1\frac{4}{9} + 1\frac{5}{9} - 1\frac{7}{9}$

- a)  $\frac{2}{9}$       c)  $\frac{7}{9}$       e)  $\frac{11}{9}$   
 b)  $\frac{5}{9}$       d)  $\frac{10}{9}$

19. Si a  $\frac{7}{8}$  de 72 le disminuimos sus  $\frac{3}{7}$ , resultará:

- a) 16      c) 36      e) 56  
 b) 26      d) 46

20. Si al simplificar la fracción  $\frac{3840}{5376}$  se obtiene una fracción irreducible, calcula la diferencia de los términos de dicha fracción irreducible.

- a) 2      c) 6      e) 10  
 b) 4      d) 8

21. ¿Cuál es el número que multiplicado por  $5\frac{1}{4}$  da como resultado  $20\frac{1}{2}$ ?

- a)  $2\frac{9}{21}$       c)  $2\frac{19}{21}$       e)  $4\frac{19}{21}$   
 b)  $3\frac{19}{21}$       d)  $3\frac{9}{21}$

22. ¿Cuánto le falta a  $\frac{2}{3}$  para ser igual al cociente de  $\frac{2}{3}$  entre  $\frac{3}{4}$ ?
- a)  $\frac{1}{9}$                       c)  $\frac{3}{9}$                       e)  $\frac{5}{9}$   
b)  $\frac{2}{9}$                       d)  $\frac{4}{9}$
23. De una piña, Miguel se come los  $\frac{5}{7}$ . Si el resto se lo come José, ¿qué fracción de piña comió José?
- a)  $\frac{1}{7}$                       c)  $\frac{3}{7}$                       e)  $\frac{5}{7}$   
b)  $\frac{2}{7}$                       d)  $\frac{4}{7}$
24. Elías me debe los  $\frac{3}{7}$  de S/. 420. Si me pagase la sexta parte de dicha cantidad, ¿cuánto me debería?
- a) S/. 80                      d) S/. 110  
b) S/. 90                      e) S/. 120  
c) S/. 100
25. Si una alumna pesa 30 kg más los  $\frac{2}{5}$  de su peso total, ¿qué peso tiene la alumna?
- a) 45 kg                      d) 60 kg  
b) 50 kg                      e) 65 kg  
c) 55 kg

## • Tarea

### Integral

1. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor?

a)  $1/4$                       d)  $7/10$   
 b)  $2/4$                       e)  $8/9$   
 c)  $3/10$

2. Resuelve:

$$3\frac{2}{5} + 1\frac{4}{5} - 2\frac{4}{5}$$

a)  $2\frac{1}{5}$                       d)  $3\frac{2}{5}$   
 b)  $2\frac{2}{5}$                       e)  $3\frac{3}{5}$   
 c)  $3\frac{1}{5}$

3. Resuelve:

$$\frac{13}{20} + \frac{11}{40} - \frac{11}{70}$$

a)  $\frac{21}{46}$                       d)  $\frac{43}{280}$   
 b)  $\frac{31}{46}$                       e)  $\frac{43}{56}$   
 c)  $\frac{41}{280}$

4. Reduce la fracción  $4781/3415$  hasta hacerla irreducible, luego convierte el resultado a número mixto. Da como respuesta la suma de los términos de la parte fraccionaria.

a) 5                          d) 8  
 b) 6                          e) 9  
 c) 7

### PUCP

5. Al simplificar una fracción  $a/b$ , obtenemos  $7/9$ . Si el MCD de «a» y «b» es 6, calcula «a + b».

a) 36                          d) 84  
 b) 42                          e) 96  
 c) 54

6. ¿De qué número es 78 sus  $3/4$ ?

a) 93                          d) 102  
 b) 96                          e) 104  
 c) 99

7. Si los  $2/9$  del costo de una licuadropa es  $5/34$ , calcula el costo de dicho artefacto.

a) S/. 133                      d) S/. 163  
 b) S/. 143                      e) S/. 173  
 c) S/. 153

8. ¿Cuántas fracciones existen con denominador 12 si la fracción es propia e irreducible?

a) 2                              d) 8  
 b) 4                              e) 10  
 c) 6

### UNMSM

9. Ernesto me debe los  $4/5$  de S/. 160. Si me pagase los  $5/8$  de dicha cantidad, ¿cuánto me debería?

a) S/. 18                      d) S/. 48  
 b) S/. 28                      e) S/. 58  
 c) S/. 38

10. Si un profesor pesa 24 kg más los  $3/5$  de su peso total, ¿cuánto pesa dicho profesor?

a) 40 kg                      d) 70 kg  
 b) 50 kg                      e) 80 kg  
 c) 60 kg

11. Calcula una fracción equivalente a  $3/7$ , de manera que la suma de sus términos sea 50. Da como respuesta el numerador.

a) 15                          d) 21  
 b) 17                          e) 23  
 c) 19

12. En un examen, los  $7/11$  de los alumnos salieron desaprobados. Si la mitad de los aprobados son mujeres, ¿qué parte del total de alumnos son los varones que han aprobado?

a)  $2/11$                           d)  $7/11$   
 b)  $3/11$                           e)  $4/7$   
 c)  $4/11$

### UNI

13. Un jugador pierde en su primera apuesta  $2/5$  de su dinero y en la segunda apuesta,  $2/7$  de lo que le quedaba. Si al final perdió los 12 soles que le quedaban, ¿cuánto tenía al inicio?

a) S/. 8                          d) S/. 38  
 b) S/. 18                      e) S/. 48  
 c) S/. 28

- |                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>14. Un caño llena un tanque en 3 horas, otro caño lo llena en 7 horas. Si ambos caños trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo llenan el tanque?</p> <p>a) 2 horas<br/>b) 2,1 horas</p> | <p>c) 3 horas<br/>d) 3,1 horas<br/>e) 4 horas</p> <p>15. La mamá de Miguel se fue de compras al mercado. Si un tercio de su dinero lo gastó en verduras y la mitad de lo que le</p> | <p>quedó, en frutas, ¿qué parte de su dinero le queda aún?</p> <p>a) <math>\frac{1}{3}</math><br/>b) <math>\frac{2}{3}</math><br/>c) <math>\frac{1}{2}</math><br/>d) <math>\frac{1}{4}</math><br/>e) <math>\frac{1}{5}</math></p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|





# NÚMEROS RACIONALES II

## Capítulo 16

### Operaciones con fracciones

#### 1. Adición y sustracción

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Ejemplos:

$$\diamond \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \times 5 + 4 \times 3}{3 \times 5} = \frac{22}{15}$$

$$\diamond \frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{6 \times 2 - 1 \times 7}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$$

Para operar con fracciones, primero se determina el MCM de los denominadores y luego se homogenizan las fracciones.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \text{ se halla } \text{MCM}_{(3;5;6)} = 30$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20}{30} + \frac{24}{30} + \frac{5}{30} = \frac{20 + 24 + 5}{30} = \frac{49}{30}$$

#### 2. Multiplicación

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Ejemplos:

$$\diamond \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

$$\diamond \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{2 \times 5 \times 6}{3 \times 4 \times 7} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7}$$

Si es posible, se simplifica la fracción resultante.

#### 3. División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ejemplos:

$$\diamond \frac{24}{7} \div \frac{20}{3} = \frac{24}{7} \times \frac{3}{20} = \frac{72}{140} = \frac{18}{35}$$

Ganancia y pérdida con fracciones

| Pierdo         | Queda          | Gana           | Tengo           |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| $\frac{1}{3}$  | $\frac{2}{3}$  | $\frac{1}{2}$  | $\frac{3}{2}$   |
| $\frac{4}{7}$  | $\frac{3}{7}$  | $\frac{4}{9}$  | $\frac{13}{9}$  |
| $\frac{9}{13}$ | $\frac{4}{13}$ | $\frac{5}{13}$ | $\frac{18}{13}$ |

#### 4. Reducción a la unidad

Consiste en realizar cálculos basados en costos y tiempos unitarios. Ejemplos:

♦ Andrés termina su tarea en 4 horas, entonces en  $\underbrace{1 \text{ hora}}_{\text{unidad de tiempo}}$  hace  $\frac{1}{4}$  de tarea.

♦ Un caño llena un tanque en 3 horas, entonces en  $\underbrace{1 \text{ hora}}_{\text{unidad de tiempo}}$  llena  $\frac{1}{3}$  de tanque.



## Trabajando en clase

### Integral

1. Resta:  $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right)$  de  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$
2. En un colegio, el total de alumnos es 800. Si los tres quintos de los alumnos se retiraron, ¿cuántos alumnos quedaron?
3. Si Pedro tiene S/. 300, y gasta los  $\frac{2}{5}$  de los  $\frac{4}{3}$  de su dinero, ¿cuánto dinero le queda?

### Católica

4. De  $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$ , suma  $\frac{1}{10}$ .

Resolución:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{10}$$

$$\frac{5 + 8 + 2}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

5. De  $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{5}\right)$ , resta  $\frac{4}{15}$
6. Fernando dedica  $\frac{1}{8}$  del día a jugar en la computadora,  $\frac{1}{16}$  del día lo dedica a comer y  $\frac{1}{4}$  del día lo dedica a dormir. Si el resto del día lo dedica a cumplir con los trabajos del colegio, ¿qué fracción del día dedica a esta última labor?
7. Juan recibe como pago semanal S/. 120  $\frac{1}{5}$ . Si una semana recibió como reintegro S/. 79  $\frac{4}{5}$ . ¿Qué parte de S/. 700 recibió esa semana?

### UNMSM

8. Resuelve:  $4\frac{5}{6} - 2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{15}$

Resolución:

$$\frac{29}{6} - \frac{11}{5} + \frac{47}{15} = \frac{145 - 66 + 94}{30} = \frac{173}{30} = 5\frac{23}{30}$$

9. Resuelve:

$$2\frac{3}{5} - 1\frac{3}{4} + 4\frac{7}{10}$$

10. Dos velas del mismo tamaño se encienden y apagan a distinta hora. Si una de ellas se consume en sus  $\frac{5}{7}$  y la otra, en sus  $\frac{3}{5}$ , ¿qué fracción de una vela inicial quedan por consumir?
11. Liz y Carolina compran iguales cantidades de carne para su consumo diario. Liz emplea en el almuerzo las  $\frac{4}{5}$  partes de su carne, y Carolina emplea también en el almuerzo los  $\frac{6}{7}$  de la cantidad de carne que compra. ¿Qué parte del total de carne comprada les quedará a las dos juntas para la cena?

### UNI

12. Un caño llenó una piscina en 6 horas, otro caño lo llena en 4 horas y otro, en 5 horas. Si los tres caños trabajan a la vez, ¿en cuánto tiempo llenarán la piscina?

Resolución:

En 1 hora:

Primer caño:  $\frac{1}{6}$

Segundo caño:  $\frac{1}{4}$

Tercer caño:  $\frac{1}{5}$

Luego, en una hora los tres caños juntos:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10 + 15 + 12}{60} = \frac{37}{60}$$

Rpta.: Si en una hora llenan juntos  $\frac{37}{60}$ , entonces, en llenar se demorarán  $\frac{60}{37}$  horas.

13. Un caño llena en 4 horas toda una piscina, un segundo caño lo llena en 6 horas y otro caño, en 8 horas. Si los tres caños se abren a la vez, ¿en cuánto tiempo se llena la piscina?
14. Si un caño puede llenar un depósito en 10 minutos y otro, en 20 minutos, ¿en cuánto tiempo pueden llenar el depósito los dos caños juntos todo el depósito?

## Sigo practicando

16. Resta  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)$  de  $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

a)  $\frac{5}{31}$

c)  $\frac{1}{30}$

e)  $\frac{2}{10}$

b)  $\frac{8}{31}$

d)  $\frac{3}{31}$

17. En un colegio, el total de alumnos es 900. Si los cuatro quintos de los alumnos se retiraron, ¿cuántos alumnos quedarán?

a) 150

c) 180

e) 240

b) 160

d) 200

18. Si Pedro tiene S/. 600, y gasta los  $\frac{3}{5}$  de los  $\frac{3}{4}$  de su dinero, ¿cuánto dinero le queda?

a) 300

c) 330

e) 500

b) 320

d) 400

19. ¿Cuánto le falta a  $\frac{4}{9}$  para ser igual a los  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{5}{2}$ ?

a)  $\frac{1}{5}$

c)  $\frac{5}{6}$

e)  $\frac{6}{5}$

b)  $\frac{11}{9}$

d)  $\frac{3}{7}$

20. Fernando dedica  $\frac{1}{4}$  del día a jugar en la computadora,  $\frac{1}{6}$  del día lo dedica a comer y  $\frac{3}{8}$  del día lo dedica a dormir. Si el resto del día lo dedicó a cumplir con los trabajos del colegio, ¿qué fracción del día dedicó a esta última labor?

a)  $\frac{7}{24}$

c)  $\frac{8}{31}$

e)  $\frac{31}{24}$

b)  $\frac{9}{25}$

d)  $\frac{5}{24}$

21. Juan recibe como pago semanal S/.  $120\frac{3}{5}$ . Si una semana recibe como reintegro S/.  $279\frac{2}{5}$ , ¿qué parte de S/. 900 recibe esa semana?

- a)  $\frac{3}{5}$                       c)  $\frac{1}{5}$                       e)  $\frac{2}{5}$   
 b)  $\frac{4}{9}$                       d)  $\frac{7}{9}$

22. Andres puede hacer una obra en 4 días, mientras que Beatriz demora 6 días en hacer una obra similar. ¿Qué tiempo demoran juntos en hacer tal obra? (tiempo en días)

- a) 2,4                      c) 12                      e) 2,5  
 b) 24                      d) 1,5

23. ¿Cuánto se debe aumentar al numerador de  $\frac{3}{8}$

para que resulte  $\frac{1}{2}$ ?

- a) 1                      c) 3                      e) 5  
 b) 2                      d) 4

24. Dos velas del mismo tamaño se encienden y apagan a distinta hora. Si una de ellas se consume en sus  $\frac{3}{8}$  y la otra en sus  $\frac{5}{9}$ , ¿qué fracción de una vela inicial quedará por consumir?

- a)  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{7}{9}$                       c)  $\frac{5}{8}$  y  $\frac{4}{9}$                       e)  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{8}{5}$   
 b)  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{7}{8}$                       d)  $\frac{1}{6}$  y  $\frac{3}{5}$

25. Liz y Carolina compran iguales cantidades de carne para su consumo diario. Liz emplea en el almuerzo los  $\frac{4}{7}$  partes de su carne, y Carolina emplea, también en el almuerzo, los  $\frac{3}{8}$  de la cantidad de carne que compra. ¿Qué parte del total de carne comprada les quedará a los dos juntos para la cena?

- a)  $\frac{51}{36}$                       c)  $\frac{53}{56}$                       e)  $\frac{31}{45}$   
 b)  $\frac{53}{27}$                       d)  $\frac{32}{51}$

## Esquema formulario

## Números racionales II

## Problemas con fracciones

Relación parte-todo

¿Qué parte de B es A?

$$\frac{A}{B}$$

Ganancia y pérdida

| Pierdo        | Queda             | Gano          | Queda             |
|---------------|-------------------|---------------|-------------------|
| $\frac{m}{p}$ | $\frac{m - p}{p}$ | $\frac{n}{p}$ | $\frac{n + p}{p}$ |

Reducción a la unidad

Un trabajo se hace en «m» días,

entonces en un día se hace  $\frac{1}{m}$ .

## • Tarea

### Integral

1. Resta  $\frac{4}{15}$  de  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ .  
 a)  $\frac{16}{31}$                       d)  $\frac{1}{4}$   
 b)  $\frac{17}{30}$                       e)  $\frac{30}{17}$   
 c)  $\frac{1}{3}$
2. En un colegio, el total de alumnos es 1000. Si los dos quintos de los alumnos se retiraron, ¿cuántos alumnos quedaron?  
 a) 400                      d) 900  
 b) 600                      e) 500  
 c) 800
3. Si Pedro tiene S/. 600 y gasta los  $\frac{3}{5}$  de los  $\frac{4}{3}$  de su dinero, ¿cuánto dinero le queda?  
 a) 100                      d) 160  
 b) 120                      e) 180  
 c) 140
4. De una cierta cantidad de dinero que tenía, me robaron la séptima parte. Si de lo que me quedaba presté la mitad, ¿qué parte del dinero que tenía antes del robo me queda?  
 a)  $\frac{4}{7}$                       d)  $\frac{4}{11}$   
 b)  $\frac{3}{7}$                       e)  $\frac{5}{7}$   
 c)  $\frac{3}{5}$

### PUCP

5. Fernando dedica  $\frac{1}{8}$  del día a jugar en la computadora y  $\frac{1}{4}$  del día lo dedica a comer y  $\frac{5}{16}$  del día lo dedica a dormir. Si el resto del día lo dedicó a cumplir con los trabajos del colegio, ¿qué fracción del día dedicó a esta última labor?  
 a)  $\frac{9}{16}$                       d)  $\frac{1}{16}$   
 b)  $\frac{7}{16}$                       e)  $\frac{5}{16}$   
 c)  $\frac{3}{16}$
6. Juan recibe como pago semanal S/. 220  $\frac{1}{5}$ . Si una semana recibe como reintegro S/. 79  $\frac{4}{5}$ , ¿qué parte de S/. 800 recibe esa semana?  
 a)  $\frac{3}{8}$                       d)  $\frac{1}{2}$   
 b)  $\frac{5}{8}$                       e)  $\frac{3}{4}$   
 c)  $\frac{7}{8}$
7. En la biblioteca del colegio, las  $\frac{2}{3}$  partes de los libros son de Matemática, la quinta parte son de Lenguaje y el resto de libros corresponde a los demás cursos.

¿Qué fracción del total de libros pertenece a los demás cursos?

- a)  $\frac{13}{15}$                       d)  $\frac{14}{15}$   
 b)  $\frac{2}{15}$                       e)  $\frac{7}{15}$   
 c)  $\frac{2}{11}$
8. Calcula:  
 $E = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$   
 a)  $\frac{5}{12}$                       d)  $\frac{5}{6}$   
 b)  $\frac{7}{30}$                       e)  $\frac{13}{30}$   
 c)  $\frac{11}{60}$

### UNMSM

9. Dos velas del mismo tamaño se encienden y apagan a distinta hora. Si una de ellas se consume en  $\frac{3}{7}$  y la otra, en sus  $\frac{4}{5}$ , ¿qué fracción de una vela inicial quedará por consumir?  
 a)  $\frac{4}{7}$  y  $\frac{1}{2}$   
 b)  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{5}{7}$   
 c)  $\frac{4}{7}$  y  $\frac{1}{5}$   
 d)  $\frac{1}{6}$  y  $\frac{3}{4}$   
 e)  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{1}{7}$

10. Liz y Carolina compran iguales cantidades de carne para su consumo diario. Liz emplea en el almuerzo las  $\frac{3}{5}$  partes de su carne, y Carolina emplea, también en el almuerzo los  $\frac{4}{7}$  de la cantidad de carne que compra. ¿Qué parte del total de carne comprada les quedará a las dos juntas para la cena?
- a)  $\frac{40}{37}$                       d)  $\frac{41}{45}$   
 b)  $\frac{41}{35}$                       e)  $\frac{41}{39}$   
 c)  $\frac{47}{37}$
11. Se compran dos latas de leche para el desayuno. Si de la primera se consume la cuarta parte y de la segunda, la mitad, ¿qué parte del total de la leche comprada queda sin consumir?
- a)  $\frac{5}{3}$                       d)  $\frac{3}{5}$   
 b)  $\frac{5}{4}$                       e)  $\frac{3}{4}$   
 c)  $\frac{4}{5}$
12. Se tienen dos tanques de distintas capacidades. Si en el primero se depositan 200 litros de agua cubriendo los  $\frac{3}{7}$  del tanque y en el segundo se depositan 700 litros, cubriendo los  $\frac{3}{4}$  del tanque, calcula la suma de las capacidades totales de ambos tanques.
- a) 1000                      d) 1400  
 b) 1200                      e) 1500  
 c) 1600
13. Un caño llenó una piscina en 4 horas, otro caño lo llena en 3 horas y otro, en 6 horas. Si los tres caños trabajan a la vez, ¿en cuánto tiempo llenan la piscina?
- a)  $\frac{5}{4}$  h                      d) 2 h  
 b)  $\frac{4}{3}$  h                      e) 5 h  
 c) 4 h
14. Si un caño llena un depósito en 5 minutos y otro caño en 6 minutos, ¿en cuánto tiempo llenan el depósito las dos llaves juntas?
- a)  $\frac{30}{11}$                       d)  $\frac{31}{10}$   
 b)  $\frac{12}{11}$                       e)  $\frac{30}{14}$   
 c)  $\frac{21}{11}$
15. Una piscina está llena hasta sus  $\frac{2}{7}$ . Si le añadimos 1080 litros de agua, el nivel de agua sube hasta los  $\frac{4}{5}$  de su capacidad total. ¿Cuál es su capacidad total?
- a) 2030 ℓ  
 b) 2100 ℓ  
 c) 4100 ℓ  
 d) 2000 ℓ  
 e) 3000 ℓ

## UNI





# RAZONES

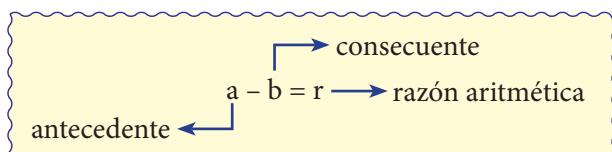
## Capítulo 17

### Razón

En matemática se denomina razón a la comparación de dos cantidades. En aritmética existen dos formas básicas de comparar; una mediante una sustracción (razón aritmética) y la otra, a través de una división (razón geométrica).

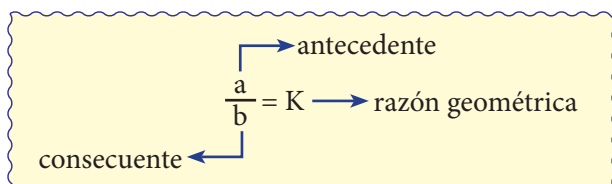
#### 1. Razón aritmética

Es la comparación de dos cantidades mediante la sustracción, poniendo de manifiesto en cuánto excede una cantidad a la otra.



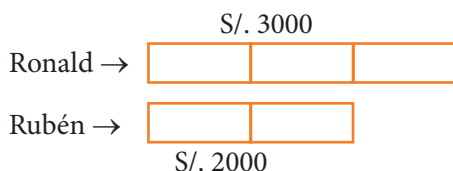
#### 2. Razón geométrica

Es la comparación de dos cantidades mediante la división, poniendo de manifiesto en cuántas veces está contenida una cantidad de la otra.



Ejemplo:

Suponiendo que Ronald gana S/. 3000 al mes y Rubén, S/. 2000. Representando gráficamente:



Notamos que Ronald gana S/. 1000 más que Rubén:

$$3000 - 2000 = 1000 \text{ (razón aritmética)}$$

También se dice que lo que gana Ronald es a 3 y lo que gana Rubén, como 2:

$$\frac{3000}{2000} = \frac{3}{2} \text{ (razón geométrica)}$$

### Ejemplos prácticos

- ¿Cuál es el consecuente de una razón geométrica cuyo valor es 3 y el antecedente es 42?

Resolución:

$$\frac{42}{x} = 3$$

$$\frac{42}{3} = x$$

$$\therefore x = 14$$

- Divide 60 en dos cantidades cuya razón aritmética sea 4.

Resolución:

$$a + b = 60 \quad \text{..... (1)}$$

$$a - b = 4 \quad \text{..... (2)}$$

$$(1) + (2):$$

$$2a = 64$$

$$a = 32$$

$$\text{Reemplazando «a» en (1):}$$

$$32 + b = 60$$

$$b = 28$$

$$\therefore a = 32$$

$$b = 28$$



## Trabajando en clase

### Integral

1. ¿Cuál es el antecedente de una razón aritmética cuyo valor es 93 y su consecuente es 42?
2. ¿Cuál es el consecuente de una razón geométrica cuyo valor es  $\frac{4}{5}$  y el antecedente es 68?
3. La razón aritmética de las edades de Juan y Pedro es 17. Si Pedro tiene 26 años, ¿cuántos años tendrá Juan dentro de 5 años?

### Católica

4. La razón aritmética de dos números es 12 y su razón geométrica, es 1,2. Calcula la suma de dichos números.

Resolución:

$$a - b = 12 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{a}{b} = 1,2 = \frac{6}{5} \Rightarrow \begin{matrix} a = 6K \\ b = 5K \end{matrix}$$

Reemplazando «a» y «b» en (1):

$$6K - 5K = 12$$

$$K = 12$$

$$\therefore a + b = 6K + 5K = 11K = 11(12) = 132$$

Rpta.: 132

5. La razón aritmética de dos números es 15 y su razón geométrica es 2,5. Calcula la suma de dichos números.
6. Dos números están en la relación de 3 a 4. Si suman 28, ¿cuál es el mayor?
7. Carlos tiene 4 años más que María y las edades de ellos está en la relación de 9 a 7. ¿Qué edad tiene María?

### UNMSM

8. Dos números son entre sí como 2 es a 5. Calcula la razón entre la suma y la diferencia de los números.

Resolución:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2K \\ b = 5K \end{matrix}$$

❖ Nos piden:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{2K+5K}{5K-2K} = \frac{7K}{3K} = \frac{7}{3}$$

9. Dos números son entre sí como 3 es a 7. Calcula la razón entre la suma y la diferencia de los números.
10. Ivette tiene, entre muñecas y osos de peluche, 30 objetos. Si le regalan 4 muñecas, el número de muñecas y el de osos de peluche estará en la relación de 8 a 9 respectivamente. ¿Cuántas muñecas tiene Ivette?
11. Las edades de dos hermanos están en la relación de 4 a 7, y dentro de 10 años estarán de 2 a 3. ¿Qué edad tiene el mayor?

### UNI

12. Hace 3 años, las edades de Luis y Carlos estaban en la relación de 5 a 6; hoy sus edades están en la relación de 6 a 7. ¿Cuál es la edad de Luis?

Resolución:

$$\frac{L-3}{C-3} = \frac{5}{6} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{L}{C} = \frac{6}{7} \Rightarrow \begin{matrix} L = 6K \\ C = 7K \end{matrix}$$

➡ Reemplazando en (1):

$$\frac{6K-3}{7K-3} = \frac{5}{6}$$

$$K = 3$$

$$\therefore 6(3) = 18 \text{ años}$$

13. Hace 10 años, las edades de Humberto y Oswaldo estaban en la relación de 5 a 11; hoy sus edades están en la relación de 5 a 8. ¿Cuál es la edad de Humberto?
14. Un comerciante ha ganado 40 soles en la venta de un artefacto que le ha costado C soles, siendo el precio de venta V. Calcula C si  $\frac{C}{V} = \frac{2}{7}$ .

## Sigo practicando

16. ¿Cuál es el antecedente de una razón aritmética cuyo valor es 118 y su consecuente es 29?
- a) 147                      c) 145                      e) 148  
b) 146                      d) 149
17. ¿Cuál es el consecuente de una razón geométrica cuyo valor es  $\frac{4}{5}$  y el antecedente es 76?
- a) 91                      c) 93                      e) 95  
b) 92                      d) 94
18. La razón aritmética de las edades de Ronald y Humberto es 5. Si Humberto tiene 24 años, ¿cuántos años tendrá Ronald dentro de 6 años?
- a) 34                      c) 36                      e) 30  
b) 35                      d) 29
19. La razón geométrica de dos números es  $\frac{13}{10}$  y su razón aritmética es 6. Calcula la suma de dichos números.
- a) 26                      c) 46                      e) 16  
b) 20                      d) 36
20. Dos números están en la relación de 5 a 7. Si suman 204, ¿cuál es el menor?
- a) 119                      c) 17                      e) 95  
b) 85                      d) 37
21. Juan tiene 5 años más que Manuel, y las edades de ellos están en la relación de 6 a 5. ¿Qué edad tiene Juan?
- a) 30                      c) 25                      e) 18  
b) 20                      d) 27
22. Dos números son entre sí como 2 es a 5. Si su producto es 1000, calcula la diferencia de los números.
- a) 10                      c) 30                      e) 50  
b) 20                      d) 40

23. Si  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$  y además  $a^2 + b^2 = 52$ ,

calcula  $b - a$ .

- a) 1                      c) 3                      e) 5  
b) 2                      d) 4

25. Las edades de dos hermanos están en la relación de 3 a 2 y dentro de 3 años estarán en la de 10 a 7. ¿Qué edad tiene el mayor?

- a) 18                      c) 30                      e) 20  
b) 27                      d) 21

24. Nancy tiene, entre perros y gatos, 20 animales. Si le regalan 8 gatos, el número de perros y gatos estaría en la relación de 3 a 4. ¿Cuántos perros tiene Nancy?

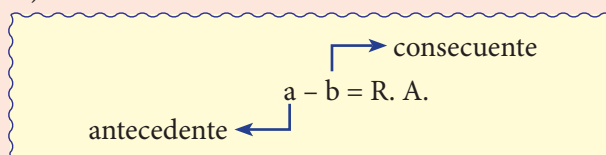
- a) 15                      c) 13                      e) 11  
b) 14                      d) 12

## Esquema formulario

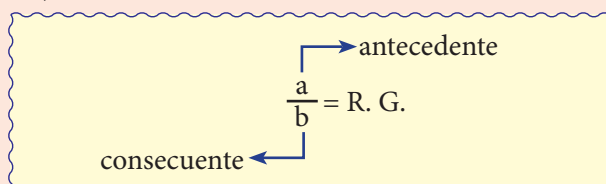
### Razones

Razón → comparación entre dos cantidades

Razón aritmética (R. A.)



Razón geométrica (R. G.)



## Tarea

### Integral

- ¿Cuál es el antecedente de una razón aritmética cuyo valor es 48 y su consecuente es 59?  
a) 106                      d) 109  
b) 107                      e) 110  
c) 108
- ¿Cuál es el consecuente de una razón geométrica cuyo valor es  $\frac{2}{3}$  y el antecedente es 38?  
a) 55                      d) 58  
b) 56                      e) 59  
c) 57
- La razón aritmética de las edades de Roger e Ivette es 13. Si Ivette tiene 22 años, ¿cuántos años tendrá Roger dentro de 6 años?  
a) 41                      d) 44  
b) 42                      e) 45  
c) 43
- Si  $24a = 15b$ , además  $a + b = 26$ , calcula b.  
a) 13                      d) 6  
b) 16                      e) 25  
c) 8

### PUCP

- Dos números están en la relación de 7 a 5. Si su razón aritmética es 8, calcula el número menor.  
a) 48                      d) 32  
b) 20                      e) 18  
c) 40

- Edwin tiene 7 años más que Carlos, y las edades de ellos están en la relación de 5 a 4. ¿Qué edad tiene Edwin?  
a) 28                      d) 35  
b) 30                      e) 40  
c) 34
- Los números «a» y «b» son proporcionales a 4 y 9 ( $a < b$ ), siendo su diferencia 35. Calcula el valor de  $(a + b)$ .  
a) 90                      d) 93  
b) 91                      e) 94  
c) 92
- De la expresión:  
$$2a = 5b$$
se sabe que  $5a + 2b = 174$ . Calcula «a».  
a) 10                      d) 40  
b) 20                      e) 50  
c) 30

### UNMSM

- Dos números entre sí son como 5 es a 7. Calcula la razón entre la suma y la diferencia de los números.  
a)  $\frac{1}{6}$                       d) 3  
b) 6                      e) 1  
c)  $\frac{1}{3}$
- Las edades de dos hermanos están en la relación de 5 a 8 y dentro de 12 años estarán en la de 7 a 10.

¿Cuántos años tendrá el menor dentro de 5 años?

- a) 30                      d) 34  
b) 6                      e) 48  
c) 35

- Las edad de Rosa y Diana son entre sí como 5 es a 4. ¿Qué edad tiene Rosa si hace 3 años tenía 4 años más que Diana?  
a) 20                      d) 21  
b) 16                      e) 24  
c) 18
- Al vender un objeto, un comerciante ganó 20 soles. Si lo que pagó por el objeto y el precio al que lo vendió están en la relación de 9 a 13, ¿cuánto le costó el objeto al comerciante?  
a) S/. 35                      d) S/. 50  
b) S/. 40                      e) S/. 55  
c) S/. 45

### UNI

- Hace 6 años, las edades de Miguel y Richard estaban en la relación de 6 a 7; hoy sus edades son como 9 a 10. ¿Cuál es la edad de Miguel?  
a) 20                      d) 12  
b) 15                      e) 18  
c) 24

14. Un comerciante ha ganado 80 soles en la venta de un artefacto que le ha costado C soles, siendo el precio de venta V.

Calcula C si  $\frac{C}{V} = \frac{4}{5}$ .

- a) 320
- b) 300
- c) 216
- d) 80
- e) 160

15. Si los consecuentes de una serie de razones geométricas son 2; 4; 6; 8; ...; 18 y 20, calcula la suma de los 5 primeros antecedentes si los 5 últimos suman 72.

- a) 24
- b) 25
- c) 26
- d) 27
- e) 28



# PROPORCIONES

## Capítulo 18

Se llama proporción a la igualdad de dos razones aritméticas o dos razones geométricas que tienen el mismo valor, y son de dos clases: proporción aritmética y proporción geométrica.

### Proporción aritmética

| Continua                                                                       | Discreta                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\underbrace{a - b = b - c}$ $a + c = 2b$ $\therefore b = \frac{a + c}{2}$     | $a - b = c - d$ $a + d = b + c$          |
| <b>De ello:</b><br>b: media diferencial o aritmética<br>c: tercera diferencial | <b>De ello:</b><br>d: cuarta diferencial |



### Proporción geométrica

| Continua                                                                           | Discreta                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\underbrace{\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k}$ $ac = b^2$ $\therefore b = \sqrt{ac}$ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ $ad = bc$ |
| <b>De ello:</b><br>b: media proporcional<br>c: tercera proporcional                | <b>De ello:</b><br>d: cuarta proporcional |

### Propiedad importante:

Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

entonces:

a.  $\frac{a + c + e}{b + d + f} = k$

b.  $\frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = k^3$

## Trabajando en clase

## Integral

- En una proporción geométrica, los términos medios son iguales y suman 20. Si uno de los extremos es 5, calcula el otro extremo.
- Halla la cuarta proporcional de 12; 18 y 28.
- Halla la media proporcional de 12 y 75.

## Católica

- En una proporción geométrica continua, la suma de los términos extremos es 29 y su diferencia, 21. ¿Cuál es la media proporcional?

Resolución:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\begin{array}{l|l} a + b = 29 & a \cdot c = b^2 \\ a - b = 21 & 25 \cdot 4 = b^2 \\ \hline 27 = 50 & 100 = b^2 \\ a = 25 & \therefore b = 10 \\ c = 4 & \end{array}$$

Rpta.: 10

- En una proporción geométrica continua, la suma de los extremos es 45 y la diferencia de las mismas, 27. Halla la media proporcional.
- Si los antecedentes de una proporción geométrica continua son 9 y 6, halla la tercera proporcional.
- Si A es la media diferencial de 35 y 23, y B, la tercera diferencial de 32 y 22, calcula A - B.

## UNMSM

- La media proporcional de «a» y 27 es «b» y, además, «a» es la tercera proporcional entre 3 y 27. Calcula (a - b).

Resolución:

|                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
|                              | Dato                          |
| $\frac{a}{b} = \frac{b}{27}$ | $\frac{3}{27} = \frac{27}{a}$ |
| Reemplazando:                | $a = 243$                     |
| $243 \cdot 27 = b^2$         |                               |
| $81 = b$                     | $\therefore 243 - 81 = 162$   |

Rpta.: 162

- La media proporcional de «m» y 27 es «n» y, además, «m» es la tercera proporcional entre 3 y 18. Halla (m - n).
- Dos números son entre sí como 3 es a 4. Si su producto es 300, calcula su diferencia.
- Si  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$  y  $a^2 + b^2 = 52$ , calcula (b - a)

## UNI

- Fredy y José tienen cantidades de dinero que están en relación de 4 a 7. Si José le diera 90 nuevos soles a Fredy, ambos tendrían lo mismo. ¿Cuánto dinero tiene Fredy?

Resolución:

$$\frac{F}{J} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{array}{l} \text{Entonces} \\ F = 4k + 90 \\ J = 7k - 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7k - 90 = 4k + 90 \\ 3k = 180 \\ k = 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Por lo tanto} \\ F = 4(60) \\ = 120 \end{array}$$

Rpta.: 120

- César y Andrea poseen cantidades de dinero que están en relación de 6 a 7. Si Andrea diera 10 nuevos soles a César, ambos tendrían la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene César?
- En una proporción geométrica continua, el producto de todos sus términos es 1296. Calcula la media proporcional.



## Sigo practicando

16. En una proporción geométrica, los términos medios son iguales y suman 10. Si uno de los extremos es 25, calcula el otro extremo.  
a) 25                      c) 5                      e) 2  
b) 3                        d) 1
17. ¿Cuánto vale la cuarta proporcional 24; 12 y 18?  
a) 11                      c) 9                      e) 18  
b) 10                      d) 12
18. Halla la media proporcional de 45 y 5.  
a) 10                      c) 225                      e) 16  
b) 15                      d) 25
19. Si «x» es la media proporcional de 24 y 6 y «n» es la cuarta proporcional de 8, «x» y 18, halla «x + n».  
a) 12                      c) 27                      e) 39  
b) 16                      d) 30
20. Si los antecedentes de una proporción geométrica continua son 18 y 12, halla la tercera proporcional.  
a) 3                        c) 12                      e) 18  
b) 8                        d) 4
21. Si A es la media diferencial de 70 y 46 y B, la tercera diferencial de 64 y 44, calcula A - B.  
a) 24                      c) 36                      e) 17  
b) 58                      d) 34
22. Si  $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \wedge a + b = 35$ , calcula «a - b».  
a) 5                        d) 13  
b) 12                      e) 11  
c) 10

23. Si  $\frac{A}{4} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3} \wedge A + B + C = 18$ ,

halla B.

- a) 4                      c) 8                      e) 10  
b) 5                      d) 9

25. Si  $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ ; además,  $A \times C = 10$ .

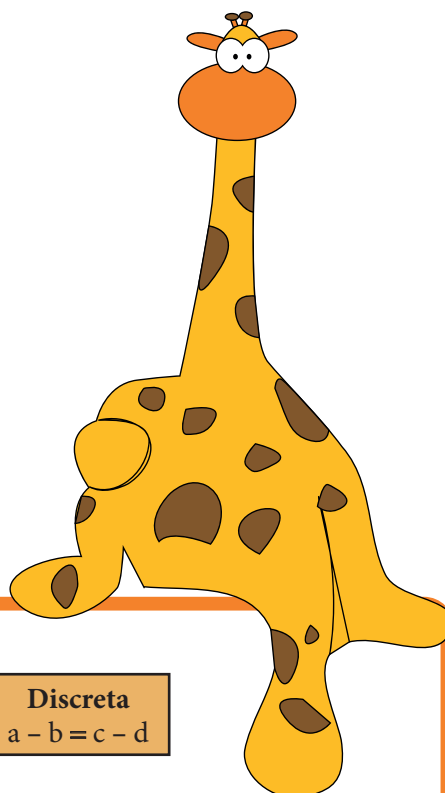
Halla  $A \times B \times B \times C$

- a) 10                      d) 144  
b) 169                      e) 100  
c) 20

24. Dos números son entre sí como 5 es a 2. Si su producto es 1000, calcula su diferencia.

- a) 500                      d) 100  
b) 300                      e) 20  
c) 200

## Esquema formulario



Proporción aritmética  $\Rightarrow$

**Continua**

$$a - b = b - c$$

**Discreta**

$$a - b = c - d$$

Proporción geométrica  $\Rightarrow$

**Continua**

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

**Discreta**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

## Tarea

### Integral

- El producto de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es 256. Si uno de los extremos es 8, cuál es el otro extremo.  
a) 3                      d) 5  
b) 2                      e) 16  
c) 4
- Halla la cuarta diferencial de 25; 17 y 32.  
a) 20                      d) 21  
b) 19                      e) 24  
c) 23
- Halla la media proporcional de 36 y 64.  
a) 16                      d) 12  
b) 9                        e) 10  
c) 48
- En una proporción geométrica continua, el producto de los cuatro términos es 1296. Halla el término medio.  
a) 13                      d) 6  
b) 16                      e) 25  
c) 8

### PUCP

- Si los consecuentes de una proporción geométrica continua son 15 y 5, halla la suma de cifras de la proporción.

- a) 26                      d) 21  
b) 23                      e) 20  
c) 22

- M es la cuarta proporcional de 24, 6 y 20; N es la media proporcional de 32 y 2; y P es la tercera proporcional de 48 y 12.

Calcula:  $M + N + P$ .

- a) 10                      d) 24  
b) 21                      e) 18  
c) 12

- En una reunión, los hombres son a las mujeres como 7 es a 5. Si la diferencia entre hombres y mujeres es 42, ¿cuántos hombres asistieron a la reunión?

- a) 100                      d) 110  
b) 147                      e) 140  
c) 105

- Si  $\frac{a}{b} = \frac{4}{5} \wedge a^2 + b^2 = 369$

calcular «b - a».

- a) 3                        d) 24  
b) 12                      e) 6  
c) 9

### UNMSM

- Dos números son entre sí como 5 es a 7. Si su producto es 3500, calcula la diferencia.

- a) 15                      d) 20  
b) 25                      e) 28  
c) 10

- Si  $\frac{a}{b} = \frac{12}{7} \wedge a + b = 133$ ,

calcular «a - b»

- a) 56                      d) 48  
b) 35                      e) 42  
c) 24

- Si  $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$

Calcula:  $\frac{a^2 + b^2}{2b^2}$

- a)  $\frac{50}{25}$   
b)  $\frac{37}{100}$   
c)  $\frac{37}{50}$   
d)  $\frac{37}{25}$   
e)  $\frac{74}{25}$

- Las edades de 2 personas son entre sí como 4 es a 7. Si dentro de 5 años sumarán 65, calcula la mayor de edad.

- a) 20                      d) 26  
b) 22                      e) 38  
c) 35

### UNI

- Joel y Martín tienen 28 figuritas en total. Si se sabe lo que tiene Joel y Martín es como 4 a 3, ¿cuántas figuritas tiene Joel?

- a) 15                      c) 14                      e) 28  
b) 16                      d) 17





# ALFONSO UGARTE SCHOOL

*Never stop learning because life never stops teaching*

**Álgebra**  
**Segundo Año**





# FACTORIZACIÓN II

## Capítulo 13

### 1. Binomio al cuadrado

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x \quad \quad + 1 = x \\ x \quad \quad + 1 = x \\ \hline 2x \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) \\ x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

### 2. Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4) \\ \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x \quad 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

### 3. Binomio al cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 +$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ \sqrt[3]{\quad} \quad \sqrt[3]{\quad} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x \quad y \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$$

También:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

### 4. Suma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} x^3 + 27y^3 = (x + 3y)((x)^2 - (x)(3y) + (3y)^2) \\ \sqrt[3]{\quad} \quad \sqrt[3]{\quad} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x \quad 3y \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 + 27y^3 = (x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$$

### 5. Diferencia de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} x^3 - 8y^3 = (x - 2y)((x)^2 + (x)(2y) + (2y)^2) \\ \sqrt[3]{\quad} \quad \sqrt[3]{\quad} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x \quad 2y \end{array}$$

**Nota:**

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Factoriza:

$$P(x) = x^2 + 6x + 9$$

2. Factoriza:

$$P(x) = 4x^2 - 25$$

3. Factoriza:

$$P(x) = x^3 - 8$$

### PUCP

4. Factoriza:

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

#### Resolución:

Como el polinomio tiene 4 términos, extraemos la raíz cúbica de los extremos.

$$\begin{array}{ccc} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 & & \\ \sqrt[3]{\phantom{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}} & & \sqrt[3]{\phantom{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & 2 \end{array}$$

Comprobamos:

$$3(x)^2(2) = 6x^2 \rightarrow (2.^{\circ} \text{ término})$$

$$3(x)(2)^2 = 12x \rightarrow (3.^{\text{er}} \text{ término})$$

$$\therefore x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$$

5. Factoriza:

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

6. Factoriza:

$$P(x) = x^3 + 125$$

7. Factoriza:

$$P(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

### UNMSM

8. Factoriza y calcula la suma de sus factores primos:

$$P(x; y) = 9x^2 - 125y^2$$

#### Resolución:

$$P(x; y) = 9x^2 - 125y^2$$

$$\begin{array}{cc} \sqrt{\phantom{9x^2 - 125y^2}} & \sqrt{\phantom{9x^2 - 125y^2}} \\ \downarrow & \downarrow \\ 3x & 5y \end{array}$$

Luego:

$$9x^2 - 125y^2 = (3x + 5y)(3x - 5y)$$

$\therefore$  sumando los factores primos:

$$3x + 5y + 3x - 5y = 6x$$

9. Factoriza y calcula la suma de sus factores primos:

$$P(x; y) = 16x^2 - 9y^2$$

10. Si al factorizar:

$$P(x; y) = 8x^3 + 27y^3,$$

se obtuvo  $(ax + by)(cx^2 - dxy + ey^2)$ ,

calcula: «a + b + c + d + e»

11. Factoriza y determina la cantidad de factores primos.

$$P(x) = (x + 3)^2 - 4$$

### UNI

12. Factoriza:

$$P(m) = 25 - 36 m^4$$

#### Resolución:

$$P(m) = 25 - 36 m^4$$

$$\begin{array}{cc} \sqrt{\phantom{25 - 36 m^4}} & \sqrt{\phantom{25 - 36 m^4}} \\ \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 m^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = 25 - 36 m^4 = (5 + 6 m^2)(5 - 6 m^2)$$

13. Factoriza:

$$P(m) = 1 - \frac{m^2}{25}$$

14. Factoriza:

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

# • SIGO PRACTICANDO

16. Factoriza:

$$P(x) = x^2 + 20x + 100$$

- a)  $(x + 5)^2$       c)  $(x + 50)^2$       e)  $(x + 10)^2$   
b)  $(x - 10)^2$       d)  $(x + 10)(x - 10)$

17. Factoriza:

$$P(x) = 25x^2 - 144$$

- a)  $(x + 3)(x - 3)$       d)  $(x + 12)(x - 12)$   
b)  $(5x + 6)(5x - 6)$       e)  $(5x + 3)(5x - 3)$   
c)  $(5x + 12)(5x - 12)$

18. Factoriza:

$$P(x) = x^3 - 125$$

- a)  $(x^2 + 5x + 25)$       d)  $(x^2 - 5x - 25)$   
b)  $(x - 5)$       e)  $(x + 5)(x^2 + 5x + 25)$   
c)  $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

19. Factoriza:

$$8a^3 - 125b^3$$

- a)  $4a^2 - 10ab - 25b^2$   
b)  $2a + 5b$   
c)  $4a^2 + 10ab + 25b^2$   
d)  $(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)$   
e)  $(2a - 5b)$

20. Factoriza:

$$P(a) = 8a^3 + 27$$

- a)  $(2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$       d)  $(a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$   
b)  $(2a + 3)$       e)  $(4a^2 - 6a - 9)$   
c)  $(4a^2 - 6a + 9)$

21. Factoriza:

$$P(x) = 25x^2 - 20x + 4$$

- a)  $(2x - 5)^2$       c)  $(x - 2)^2$       e)  $(5x - 2)^2$   
b)  $(x - 5)^2$       d)  $(5x - 2)$

22. Factoriza:

$$x^6 - b^{10}$$

- a)  $(x^3 + b^5)^2$       d)  $(x^3 - b^5)(x^3 + b^5)$   
 b)  $(x^3 - b^5)^2$       e)  $(x^3 - b^5)$   
 c)  $(x^3 + b^5)$

23. Factoriza:

$$P(y) = y^4 + 2y^2 + 1$$

- a)  $(y^2 - 1)^2$       d)  $(y + 1)^2$   
 b)  $(y^2 + 1)^2$       e)  $(y^2 + 2)^2$   
 c)  $y^2$

24. Si al factorizar  $P(x; y) = 27x^3 + 64y^3$ , se obtuvo  $(ax + by)(cx^2 - dxy + ey^2)$ , calcula: «a + b + c + d + e»

- a) 44      c) 34      e) -44  
 b) 24      d) 54

25. Factoriza y luego determina la cantidad de factores primos.

$$P(x) = (x + 2y)^2 - 81$$

- a) 3      c) 4      e) 2  
 b) -3      d) -2

## • Esquema formulario

Diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Diferencia de cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Suma de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Binomios al cubo:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$



## Tarea

### Integral

1. Factoriza:

$$P(x) = x^2 - 10x + 25$$

- a)  $(x - 15)^2$       c)  $(x - 5)$       e)  $(x + 5)^2$   
b)  $(x + 5)$       d)  $(x - 5)^2$

2. Factoriza:

$$P(x) = 16x^2 - 81$$

- a)  $(2x + 3)(2x - 3)$       d)  $(4x + 3)(4x - 3)$   
b)  $(4x + 9)(4x - 9)$       e)  $(2x + 9)(2x - 9)$   
c)  $(x + 9)(x - 9)$

3. Factoriza:

$$P(x) = x^3 - 27$$

- a)  $x^2 - 3x - 9$       d)  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$   
b)  $(x + 3)(x^2 - 3x - 9)$       e)  $(x + 3)(x^2 + 3x + 9)$   
c)  $(x - 3)(x^2 - 3x - 9)$

4. Factoriza:

$$P(a; b) = 27a^3 - b^3$$

- a)  $(3a - b)(9a^2 + 3ab - b^2)$   
b)  $3a + b$   
c)  $9a^2 + 3ab + b^2$   
d)  $(3a - b)$   
e)  $(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$

### PUCP

5. Factoriza:

$$P(x) = x^3 + 64$$

- a)  $x - 4$   
b)  $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$   
c)  $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$   
d)  $x^2 - 4x + 16$   
e)  $x + 4$

6. Factoriza:

$$P(x) = 4x^2 + 12x + 9$$

- a)  $(x - 3)^2$       c)  $(x + 3)^2$       e)  $(2x - 3)^2$   
b)  $(x + 9)^2$       d)  $(2x + 3)^2$

7. Factoriza:

$$P(m; n) = 9 - (m + n)^2$$

- a)  $(3 - m)(3 + m)$   
b)  $(m - n)(m + n)$   
c)  $(3 - m - n)(3 + m + n)$   
d)  $(3 - n)(3 + n)$   
e)  $(3 + m + n)(-3 - m - n)$

8. Factoriza:

$$P(x) = 1 - 8x^3$$

- a)  $1 - 2x - 4x^2$   
b)  $(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$   
c)  $1 - 2x$   
d)  $1 + 2x$   
e)  $1 + 2x + 4x^2$

### UNMSM

9. Si al factorizar:  $P(x; y) = 27x^3 - 125y^3$ , se obtuvo  $(ax - by)(cx^2 + dxy + ey^2)$ , calcula «a + b + c + d + e»

- a) 47      c) 57      e) 36  
b) 62      d) 30

10. Factoriza y determina la cantidad de factores primos.

$$P(x) = (x - 5)^2 - 25$$

- a) 2      c) 4      e) 5  
b) 3      d) 1

11. Factoriza:

$$P(x) = 27 - 27x + 9x^2 - x^3$$

- a)  $(3 + x)^3$       c)  $(3 - x)^3$       e)  $(3 + x)$   
b)  $(3 - x)$       d)  $(2x - 3)^3$

12. Factoriza:

$$P(m; n) = 27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3$$

- a)  $(3m + 4n)^3$       c)  $(m + n)^3$       e)  $(3m + n)^3$   
b)  $(m + 4n)^3$       d)  $(3m - 4n)^3$

UNI

13. Factoriza:

$$P(m) = 36 - 25m^2$$

- a)  $(6 - 5m)^2$       d)  $(6 + 5m)^2$   
b)  $(6 - m^2)(6 + m^2)$       e)  $(6 + 5m)(6 - 5m)$   
c)  $(6 + 5m^2)(6 - 5m^2)$

14. Factoriza:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

- a)  $(-x + 4)^3$       c)  $(x - 2)^3$       e)  $(2x - 1)^3$   
b)  $(x - 2)$       d)  $(x + 2)^3$

15. Factoriza:

$$P(x; y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

- a)  $(x - y)^2$       c)  $(2x - 3y)$       e)  $(x - 3y)^2$   
b)  $(2x - 3y)^2$       d)  $(2x + 3y)^2$



# ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO I

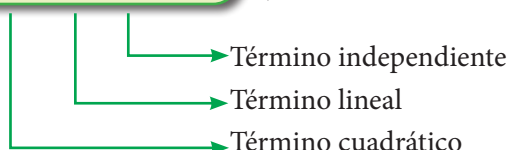
## Capítulo 14

### 1. Definición

Una ecuación cuadrática es aquella que después de reducirla, se obtiene a un polinomio de grado 2.

### 2. Forma general

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$$



Donde:

«x» es la incógnita

a, b, c son números reales

Ejemplos:

$$5x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$7x^2 + x + 3 = 0$$

Una ecuación de segundo grado o cuadrática tiene 2 raíces que se les asigna los símbolos: « $x_1$ ;  $x_2$ », de modo que el conjunto solución (C. S.) se escribe así:

$$C. S. = \{x_1; x_2\}$$

### 3. Resolución de ecuaciones cuadráticas

Resolver una ecuación cuadrática, significa encontrar las raíces o soluciones de esta.

#### A. Ecuaciones incompletas

- Si  $b = 0$ , tenemos la ecuación:

$$ax^2 + c = 0$$

Se resuelve despejando  $x^2$  y usando la propiedad de la raíz cuadrada; esto es:

Si  $x^2 = c \leftrightarrow x \geq 0$ , entonces:

$$x = \pm \sqrt{c}$$

Ejemplo:

Resuelve:  $2x^2 - 18 = 0$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$\rightarrow x_1 = 3; x_2 = -3$$

$$\therefore C. S. = \{-3; 3\}$$

- Si  $c = 0$ , tenemos la ecuación:

$$ax^2 + bx = 0$$

Se resuelve factorizando y aplicando el principio del producto cero.

Ejemplo:

Resuelve:

$$6x^2 + 24x = 0$$

$$6x(x + 4) = 0$$

Usamos el principio del producto cero:

$$6x = 0 \quad \vee \quad x + 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = -4 \rightarrow C. S. = \{-4; 0\}$$

#### B. Ecuaciones completas

- Si  $b \neq 0$  y  $c \neq 0$ , tenemos la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$$

- Se resuelve factorizando por aspa simple.

Ejemplo:

Resuelve:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$3x \quad \times \quad -1 = -x$$

$$x \quad \times \quad -2 = -6x$$

$$\boxed{-7x}$$

Factorizando:

$$(3x - 1)(x - 2) = 0$$

entonces:

$$3x - 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$$

$$x = 1/3 \quad \quad \quad x = 2$$

$$C. S. = \{1/3; 2\}$$

- Si el trinomio « $ax^2 + bx + c$ » no es factorizable por aspa simple, se usará la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante:  $\Delta = b^2 - 4ac$

Ejemplo:

Resuelve:  $x^2 - 7x + 2 = 0$

$a = 1$ ;  $b = -7$ ;  $c = 2$

Reemplazamos en la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{41}}{2}$$

$$C. S. = \left\{ \frac{7 + \sqrt{41}}{2}; \frac{7 - \sqrt{41}}{2} \right\}$$

### C. Reconstrucción de la ecuación cuadrática

Si conocemos las raíces  $x_1$  y  $x_2$  de la ecuación de segundo grado, la ecuación será:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

donde:

$$S = x_1 +$$

$$P = x_1 \cdot x_2$$

## Recuerda

La gráfica de una ecuación de 2.º grado (ecuación cuadrática) es la cónica, llamada parábola.

## Trabajando en clase

### Integral

1. Resuelve e indica la menor solución:

$$5x^2 - 45 = 0$$

2. Resuelve e indica la menor solución:

$$x^2 - 15x = 0$$

3. Resuelve y luego indica la menor raíz:

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

### PUCP

4. Calcula el valor de «m», si se sabe que  $x = 3$  es la solución de la ecuación de segundo grado.

$$x^2 - mx + 27 = 0$$

**Resolución:**

Como  $x=3$  es la solución de la ecuación, entonces lo reemplazamos en «x».

$$(3)^2 - m(3) + 27 = 0$$

$$9 - 3m + 27 = 0$$

$$36 = 3m$$

$$12 = m$$

∴ el valor de «m» es 12.

5. Calcula el valor de «m» si  $x = 2$  es la solución de la ecuación:

$$x^2 - mx + 8 = 0$$

6. Resuelve:  $9x^2 - 4 = 0$

7. Resuelve e indica la mayor raíz de  $7a^2 - 14a = 0$

### UNMSM

8. Resuelve e indica la menor raíz de la siguiente ecuación:

$$2x^2 + 5x - 4 = 0$$

**Resolución:**

Como no se puede factorizar por aspa simple, usaremos la fórmula general:

$a = 2$ ;  $b = 5$ ;  $c = -4$

Reemplazamos:

$$x_{1,2} = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}$$

$$\therefore \text{la menor raíz es } x_2 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}$$

9. Resuelve e indica la mayor raíz de  $x^2 + 5x - 2 = 0$

10. Reconstruye la ecuación cuadrática cuyas raíces son  $-3$  y  $-5$ .

11. Reconstruye la ecuación cuadrática cuyas raíces son  $10$  y  $-5$

UNI

12. Resuelve:  $(x + 2)(x - 3) = 6$

Resolución:

$$(x + 2)(x - 3) = 6$$

$$x^2 - 3x + 2x - 6 = 6$$

$$x^2 - x - 6 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x \quad \times \quad -4 \quad = -4x$$

$$x \quad \times \quad +3 \quad = +3x$$

$$\boxed{-x}$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -3$$

$$\text{C.S.} = \{-3; 4\}$$

13. Resuelve:

$$(x + 1)(x - 5) = 16$$

14. Si la raíz de  $(b + 1)x^2 + bx - 3 = 0$  es 2, calcula el valor de «b».



## Esquema formulario

### ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Incompletas:

$$ax^2 + b = 0$$

$$x = \pm \sqrt{b}$$

$$ax^2 + bx = 0$$

Principio del producto cero

Completas:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Por aspa simple

Por fórmula general  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Reconstrucción de una ecuación de segundo grado:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

S: Suma de raíces

P: Producto de raíces

• SIGO PRACTICANDO

16. Resuelve e indica la menor raíz:

$$5x^2 - 20 = 0$$

- a) 4                      c) 2                      e) -1  
b) 3                      d) -2

17. Resuelve e indica la suma de sus raíces:

$$x^2 + 27x = 0$$

- a) -9                      c) 9                      e) 27  
b) 18                      d) -27

18. Calcula el valor de «m» si  $x = 2$  es la solución de la ecuación de segundo grado.

$$x^2 + mx + 6 = 0$$

- a) 6                      c) 4                      e) -5  
b) 3                      d) 5

19. Resuelve:

$$2x + \frac{x^2}{2} = 16$$

- a) 8                      c)  $\{-8; 4\}$                       e) 4  
b) -4                      d) -8

20. Resuelve:  $25x^2 - 36 = 0$

- a)  $x = \pm 5/6$                       d)  $x = 6/5$   
b)  $x = 5/6$                       e)  $x = -6/5$   
c)  $x = \pm 6/5$

21. Resuelve e indica la mayor raíz:

$$-2x^2 + 8 = 0$$

- a) 2                      c) 4                      e) -4  
b) -2                      d) 0

22. Resuelve:

$$(2x + 3)^2 - 4x = 13 - 7x$$

- a) 4
- b) -1
- c) 1

- d)  $\{-4; 1/4\}$
- e)  $\{-4; 1\}$

23. Resuelve e indica la mayor raíz:

$$3x^2 + 10x + 20 = 10 - 3x$$

- a) 0
- b) 3

- c) 2
- d) -1

- e) 1

24. Reconstruye la ecuación de segundo grado cuyas raíces son -4 y -7.

- a)  $x^2 - 11x - 28 = 0$
- b)  $x^2 - 11x + 28 = 0$
- c)  $x^2 + 28 = 0$
- d)  $x^2 + 11x + 28 = 0$
- e)  $x^2 + 11x = 0$

25. Reconstruye la ecuación de segundo grado, cuyas raíces son: -7 y 0.

- a)  $x^2 + x = 0$
- b)  $x^2 + 7x = 0$
- c)  $x^2 + 7 = 0$
- d)  $x^2 - 7x = 0$
- e)  $x^2 - 7 = 0$

# • Tarea

## Integral

- Resuelve e indica la mayor raíz.  
 $3x^2 - 27 = 0$   
 a) 4                      c) 2                      e) -3  
 b) -2                    d) 3
- Resuelve e indica la mayor raíz:  $x^2 + 9x = 0$ .  
 a) -9                      c) 0                      e) 2  
 b) 3                        d) 1
- Resuelve e indica la mayor raíz:  $x^2 - x - 6 = 0$ .  
 a) 3                        c) -2                      e) 5  
 b) 2                        d) 4
- Resuelve:  
 $x^2 - 7x + 10 = 0$   
 a) {-5; -2}              c) {5; 2}                      e) {2}  
 b) {-5}                    d) {5}

## PUCP

- Calcula el valor de «m» si  $x=1$  es la solución de la ecuación de segundo grado.  
 $x^2 - mx + 7 = 0$   
 a) 6                        c) 4                        e) 8  
 b) -4                      d) -8
- Resuelve e indica la mayor raíz:  $3x^2 + 5x = 0$ .  
 a) 0                        c) 5/3                      e) 1  
 b) 3/5                      d) -5/3
- Resuelve e indica la menor solución.  
 $-4x^2 - 7x = 0$   
 a) -4/7                    c) -7/4                      e) 0  
 b) 4/7                      d) 7/4
- Resuelve:  $6x^2 + 6x - 72 = 0$   
 a) {4}                      c) {3}                      e) {-4; 3}  
 b) {-4; -3}              d) {-4}

## UNMSM

- Reconstruye la ecuación cuadrática cuyas raíces son -1 y 4.  
 a)  $x^2 + 3x + 4 = 0$               d)  $x^2 - 4 = 0$   
 b)  $x^2 - 3x = 0$                       e)  $x^2 + 3x = 0$   
 c)  $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Reconstruye la ecuación cuadrática cuyas raíces son 0 y -5.  
 a)  $x^2 - 5x = 0$                       d)  $x^2 - 5 = 0$   
 b)  $x^2 + 5x = 0$                       e)  $x^2 + x = 0$   
 c)  $x^2 + 5 = 0$
- Resuelve e indica la mayor raíz  
 $x^2 - 5x + 8 = 2x + 4$   
 a)  $7 + \sqrt{33}$                       d)  $\frac{\sqrt{33}}{2}$   
 b)  $\frac{7 + \sqrt{33}}{2}$                       e)  $\frac{-\sqrt{33}}{2}$   
 c)  $\frac{7 - \sqrt{33}}{2}$
- Resuelve:  
 $2x^2 - 392 = 0$   
 a) {-16; 16}                      d) {14}  
 b) {16}                              e) {-14}  
 c) {14; -14}

## UNI

- Resuelve e indica la suma de las raíces.  
 $(x + 2)(x - 1) = 4$   
 a) 5                        c) -3                      e) -1  
 b) 2                        d) -6

14. Si la raíz de la siguiente ecuación:

$(a + 2)x^2 + ax - 3 = 0$  es 1; calcula «a».

- a) -2                      c) 2                      e) -1/2  
b) 1/2                      d) -1

15. Resuelve:

$$x^2 + (1 - x)^2 = 5 - (2 - x)^2$$

- a) C. S. = {-2}    c) C. S.={0}    e) C. S.={0;2}  
b) C. S.={0; -2}    d) C. S.={2}





# ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO II

## Capítulo 15

### I. DISCRIMINANTE ( $\Delta$ )

Sea la ecuación cuadrática:  $ax^2 + bx + c = 0$ ;  $a \neq 0$

su discriminante es:  $\Delta = b^2 - 4ac$

### II. PROPIEDADES DEL DISCRIMINANTE

Raíces iguales  
Solución única  
Raíz de multiplicidad 2  
Raíz doble  
Conjunto solución unitario

$\Delta = 0$

**Ejemplos:**

- Si  $2x^2 - 3x - 1 = 0$   
su discriminante es:  
 $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-1)$   
 $\Delta = 9 + 8$   
 $\Delta = 17$
- Si  $x^2 + mx + 1 = 0$ ; tiene raíces iguales,  
calcula «m».  
→ como tienen raíces iguales, entonces  $\Delta = 0$

Luego:

$$\begin{aligned}\Delta &= m^2 - 4(1)(1) = 0 \\ \Delta &= m^2 - 4 = 0 \\ m^2 &= 4 \\ \rightarrow m &= \pm 2\end{aligned}$$

### III. PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

En toda ecuación cuadrática de la forma:  
 $ax^2 + bx + c = 0$ ;  $a \neq 0$

Podemos calcular la suma y el producto de sus raíces sin resolver dicha ecuación, utilizando las propiedades de las raíces.

#### 1. La suma de raíces

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

#### 2. El producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### 3. La suma de raíces inversas

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

Ejemplo:

$$2x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$a = 2 \quad b = 4 \quad c = -1$$

- Suma de raíces:  
 $x_1 + x_2 = \frac{-4}{2} = -2$
- Producto de raíces:  
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
- Suma de raíces inversas:  
 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-4}{-1} = 4$

**Tenemos:**  $ax^2 + bx + c = 0$ ;  $a \neq 0$

- Raíces simétricas**  
Si sus raíces son simétricas, la suma de sus raíces es 0.  
Suma:  $x_1 + x_2 = 0$   
Regla práctica:  $b = 0$
- Raíces recíprocas**  
Son aquellas cuyo producto es igual a 1.  
Producto  $x_1 \cdot x_2 = 1$   
Regla práctica:  $a = c$
- Raíz nula**  
Es aquella que vale cero: « $x = 0$ »  
Regla práctica:  $c = 0$

### Advertencia pre

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Calcula el discriminante de la siguiente ecuación:  

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$
2. Si las raíces de la siguiente ecuación son iguales, calcula el valor de «m».  

$$x^2 + mx + 4 = 0$$
3. Calcula la suma y el producto de raíces de la siguiente ecuación:  

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

### Católica

4. Calcula «m» si la suma de raíces es -5.  

$$3x^2 + mx - 2 = 0$$

#### Resolución:

De la ecuación:

$$a = 3 \qquad b = m \qquad c = -2$$

La suma de raíces es:  $\frac{-b}{a} = -5$

$$\frac{-m}{3} = -5$$

$$m = 3(5)$$

$$m = 15$$

Rpta.: 15

5. Calcula P si el producto de raíces es 7.  

$$5x^2 - 4x + P = 0$$
6. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la ecuación:  

$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$
calcula:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
7. Si la siguiente ecuación tiene raíz doble, calcula «m».  

$$9x^2 - 12x + m = 0$$

### UNMSM

8. Si:  

$$(m + 2)x^2 + (m - 1)x + 2m - 1 = 0$$
, calcula «m» en cada uno de los siguientes casos:  
Raíces simétricas  
Raíces recíprocas  
Raíz nula

#### Resolución:

- Raíces simétricas ( $b = 0$ )  

$$m - 1 = 0$$

$$m = 1$$
- Raíces recíprocas ( $a = c$ )  

$$m + 2 = 2m - 1$$

$$2 + 1 = 2m - m$$

$$3 = m$$
- Raíz nula ( $c = 0$ )  

$$am - 1 = 0$$

$$am = 1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

9. Si  $(m + 3)x^2 + (m - 2)x + 5m - 2 = 0$ , calcula «m» en cada uno de los siguientes casos:  
Raíces simétricas  
Raíces recíprocas  
Raíz nula

10. Calcula «m» si las raíces son simétricas:  

$$3x^2 + (m - 1)x + 2 = m + 2x$$

11. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la siguiente ecuación:  

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$
calcula:  
 $x_1 - x_2$ ; con  $x_1 < x_2$

### UNI

12. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la ecuación:  

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

Calcula:  $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

#### Resolución:

Nos piden:  $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

$$\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{\text{producto de raíces}} + \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{suma de raíces}} + 1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-5)}{1} = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{1} = 3$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1)$$

$$x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

$$3 + 5 + 1 = 9$$

Rpta.: 9

13. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de  $x^2 - 7x + 5 = 0$ , calcula:  
 $A = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$

14. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , calcula:  
 $x_1^2 + x_2^2$



## Esquema formulario

**Discriminante:**  $\Delta = b^2 - 4ac$

**I**

a)  $\Delta = 0$

raíces iguales

solución única

raíz doble

conjunto solución unitario

b) Raíz simétrica  $\rightarrow b = 0$

c) Raíz recíproca  $\rightarrow a = c$

d) Raíz nula  $\rightarrow c = 0$

**II**

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c}$$



# Sigo practicando

16. Calcula la discriminante de la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

- a) 40                      c) 20                      e) -10  
b) 30                      d) -40

19. Calcula el discriminante:

$$2x^2 - 3x + 4 = x^2 + x - 2$$

- a) 2                              c) 4                              e) -8  
b) -4                              d) 8

17. Si las raíces de la siguiente ecuación son iguales, calcula el valor de «m».

$$3x^2 + mx + 3 = 0$$

- a)  $\pm 6$                       c)  $\pm 8$                       e) 7  
b)  $\pm 3$                       d) 5

20. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la ecuación:

$$3x^2 - 8x - 5 = 0$$

calcula:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

- a)  $-\frac{5}{8}$                       c)  $\frac{8}{5}$                       e) -8  
b)  $-\frac{8}{5}$                       d)  $\frac{5}{8}$

18. Calcula la suma y el producto de raíces de la siguiente ecuación:

$$5x^2 - 3x - 4 = 0$$

- a)  $S = 3/5$                       c)  $S = 5/3$                       e)  $S = 5/3$   
     $P = -4/5$                        $P = -4/3$                        $P = -4$   
b)  $S = 3$                       d)  $S = 3/5$   
     $P = -4$                        $P = 4/5$

21. Si la ecuación:

$$3x^2 - 6x - m = 0$$

tiene raíz doble, calcula «m».

- a) 9                              c) -3                              e) 6  
b) 12                              d) 3

22. Calcula la suma de raíces de la siguiente ecuación:

$$(x + 2)^2 - 3 = x - 2$$

a) -3

c)  $\frac{1}{3}$

e) -1

b) 3

d) 1

24. Calcula «m» si las raíces son simétricas.

$$2x^2 + (m - 2)x + 3 = m - 3x$$

a) 3

c) 2

e) 1

b) -2

d) -1

23. Calcula el producto de raíces de la siguiente ecuación:

$$(x + 3)(x - 1) = -3x + 4$$

a) 3

c) 5

e) -7

b) -5

d) 7

25. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la ecuación:

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

calcula:  $x_1 - x_2$ ; con  $x_1 < x_2$

a)  $-\sqrt{17}$

c)  $\sqrt{17}$

e) 17

b)  $\sqrt{8}$

d)  $-\sqrt{8}$

# Tarea

## Integral

1. Calcula el discriminante de la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

- a) 17                      d) 8  
b) -17                    e) -25  
c) 25

2. Si las raíces de la siguiente ecuación son iguales, calcula «m».

$$x^2 + mx + 25 = 0$$

- a)  $\pm 10$                       d) 25  
b) 20                          e) 100  
c) 30

3. Calcula la suma y el producto de raíces de la siguiente ecuación:

$$3x^2 - 8x + 7 = 0$$

- a)  $S = 8$                       d)  $S = 8/7$   
P = 7                          P = 3/7  
b)  $S = 8/3$                       e)  $S = 3/8$   
P = 7/3                          P = 7/3  
c)  $S = 3/8$   
P = 3/7

4. Calcula la suma de raíces de la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x + 5$$

- a) 0                              d) 2  
b) -1                            e) -2  
c) 1

## PUCP

5. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la siguiente ecuación:

$$3x^2 - 2x + 4 = 0$$

Calcula:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

- a)  $-\frac{1}{2}$                       d) -2  
b)  $\frac{1}{2}$                           e) 4  
c) 2

6. Si la ecuación:

$$2x^2 - 3x + m = 0$$

tiene raíz doble, calcula «m».

- a) 9                              d)  $-\frac{9}{8}$   
b)  $-\frac{8}{9}$                           e)  $\frac{8}{9}$   
c)  $\frac{9}{8}$

7. Calcula el discriminante de la siguiente ecuación:

$$x(x+1) + 3 = -2x^2$$

- a) 4                              d) -35  
b) -36                          e) 35  
c) 36

8. Calcula el producto de las raíces de la ecuación:

$$(x+2)^2 = 4x$$

- a) 2                              c) 0                          e) 1  
b) 4                              d) -4

## UNMSM

9. Calcula «m» si las raíces son simétricas.

$$5x^2 + (m-2)x + 3 = 2m - x$$

- a) 3                              c) 2                          e) 1  
b) -2                            d) -1

10. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la ecuación:

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

Calcula:

$$x_1 - x_2; \text{ con } x_1 < x_2$$

- a)  $\sqrt{20}$   
b)  $-\sqrt{2}$   
c)  $\sqrt{2}$   
d)  $-\sqrt{21}$   
e)  $\sqrt{21}$

11. Calcula «m» si las raíces de la ecuación son recíprocas:

$$5x^2 + (m-2)x + 2m = mx^2 + 1$$

- a) 2                              c) 4                          e) 5  
b) 3                              d) 1

12. Si la ecuación:

$$9x^2 - 12x + m = 0$$

tiene raíz doble, calcula «m».

- a) 0                              d) -4  
b) -2                            e) 4  
c) 2

## UNI

13. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la ecuación:

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

calcula:  $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

- a) 10  
b) -11  
c) 11  
d) 9  
e) 8

14. Si  $x_1 \wedge x_2$  son raíces de la ecuación:  $x^2 - 7x + 8 = 0$  calcula:

$$x_1^2 + x_2^2$$

- a) 49                              c) 32                          e) 33  
b) 30                              d) -33

15. Calcula «m» si las raíces de la ecuación son simétricas.

$$3x^2 + (m+2)x + 5 = m - 2x$$

- a) 3                              d) 4  
b) -2                            e) 2  
c) -4



# INTERVALOS

## Capítulo 16

### I. INTERVALOS

Como ya sabemos, el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  lo podemos representar en una recta numérica. Por lo tanto, cada segmento de esta recta representa a un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Cada uno de estos subconjuntos se denomina «intervalos».

### II. TIPOS DE INTERVALOS

#### 1. Intervalo abierto $a < x < b$

Se denota como  $\langle a; b \rangle$  o  $]a; b[$  y su gráfico es:



#### 2. Intervalo cerrado $a \leq x \leq b$

Se denota como  $[a; b]$  y su gráfico es:



#### 3. Intervalo semiabierto

##### A. Por la izquierda: $a < x \leq b$

Se denota como  $\langle a; b]$  o  $]a; b]$  y su gráfico es:



##### B. Por la derecha: $a \leq x < b$

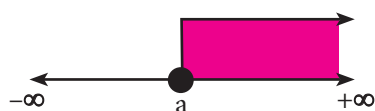
Se denota como  $[a; b \rangle$  o  $[a; b[$  y su gráfico es:



#### 4. Intervalo infinito

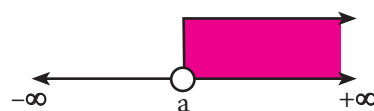
- $a \leq x$

Se denota como  $[a; +\infty)$  y su gráfico es:



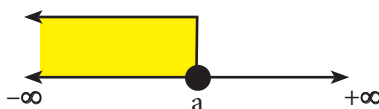
- $a < x$

Se denota como  $\langle a; +\infty)$  o  $]a; +\infty[$  y su gráfico es:



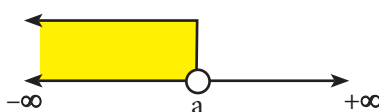
- $a \geq x$

Se denota como  $\langle -\infty; a]$  y su gráfico es:



- $a > x$

Se denota como  $\langle -\infty; a \rangle$  o  $] -\infty; a[$  y su gráfico es:



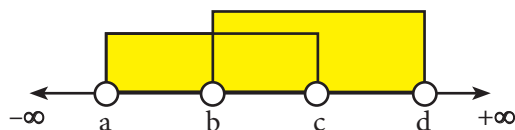
### III. OPERACIONES CON INTERVALOS

#### 1. Unión

Su símbolo es:  $\cup$

Si:  $a < b < c < d$

Graficamos  $(a < x < c) \cup (b < x < d)$



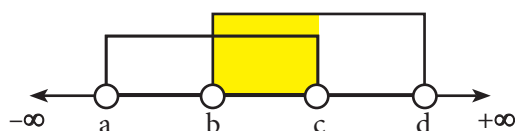
Unión:  $a < x < d$  o  $\langle a; d \rangle$

#### 2. Intersección

Su símbolo es:  $\cap$

Si:  $a < b < c < d$

Graficamos:  $(a < x < c) \cap (b < x < d)$



Intersección:  $b < x < c$  o  $\langle b; c \rangle$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Grafica e identifica con un intervalo la siguiente expresión:

$$-3 \leq x < 2$$

2. Grafica, expresa como intervalo y determina el mayor valor entero que puede tomar «x» en la siguiente expresión:

$$-5 \leq x < 8$$

3. Grafica, expresa como intervalo y calcula la suma del mayor y menor valor entero que puede tomar «x» en la siguiente expresión:

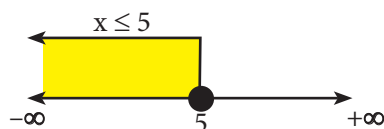
$$-10 < x < 5$$

### Católica

4. Grafica, expresa como intervalo y calcula la suma de todos los valores positivos que puede tomar «x» en la siguiente expresión:

$$x \leq 5$$

Resolución:



$$x \in \langle -\infty ; 5 ]$$

→ Los valores positivos: 1; 2; 3; 4; 5

$$\therefore \text{suma: } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Rpta.: 15

5. Grafica, expresa como intervalo y calcula la suma de todos los valores negativos que puede tomar «x» en la siguiente expresión:

$$x \geq -4$$

6. Si  $A = [-2; 5] \wedge B = \langle -3; 6 ]$  calcula: « $A \cup B$ »

7. Si  $A = \langle 3; 15 ] \wedge B = \langle 5; 20 ]$  calcula: « $A \cap B$ »

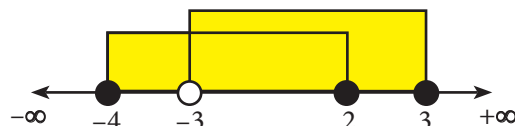
### UNMSM

8. Expresa como intervalo:  
 $-3 < x \leq 3 \cup -4 \leq x \leq 2$

Resolución:

$$-3 < x \leq 3 \quad ; \quad -4 \leq x \leq 2$$

$$\langle -3; 3 ] \cup [-4; 2 ]$$



$$\rightarrow \langle -3; 3 ] \cup [-4; 2 ]$$

$$\therefore [-4; 3 ]$$

9. Expresa como intervalo:

$$-5 < x \leq 2 \cap -4 \leq x < 4$$

10. Si  $x \in \mathbb{Z}^- \wedge x \in [-7; 5]$ , determina los valores que puede tomar «x».

11. Si  $x \in \mathbb{N} \wedge x \in [-5; 5]$ , determina los valores que puede tomar «x».

### UNI

12. Determina el intervalo al cual pertenece «x» en cada caso.

I.  $5x < 30$

II.  $-3x \geq 12$

Resolución:

I.  $(5x < 30) \div 5$

$$x < 6$$

$$\langle -\infty ; 6 \rangle$$

II.  $(-3x \geq 12) (-1)$  cambia

$$(3x \leq -12) \div 3$$

$$x \leq -4$$

$$\langle -\infty ; -4 ]$$

13. Determina el intervalo al cual pertenece «x» en cada caso.

I.  $4x > 28$

II.  $-3x \leq 21$

14. Si  $x \in \mathbb{Z}^- \wedge x \in \langle -10; 4 ]$ , determina la suma del mayor y menor valor entero que puede tomar «x».

## Sigo practicando

16. Grafica y expresa como intervalo la siguiente expresión:

$$-2 \leq x < 8$$

- a)  $\langle 2; 8 \rangle$       c)  $[2; 8)$       e)  $\langle -2; 8 \rangle$   
b)  $[-2; 8)$       d)  $[-2; 8]$

17. Grafica, expresa como intervalo y determina el menor valor entero que puede tomar «x» en la siguiente expresión:

$$-7 < x \leq 4$$

- a)  $\langle -7; 4]; -6$       d)  $\langle -7; 4]; 4$   
b)  $\langle -7; 4]; -8$       e)  $\langle -7; 4]; -7$   
c)  $\langle -7; 4]; -7$

18. Grafica, expresa como intervalo y calcula la suma del mayor y menor valor entero que puede tomar «x» en la siguiente expresión.

$$-12 < x < -3$$

- a)  $\langle -12; 3]; 15$   
b)  $\langle -12; 3]; -9$   
c)  $\langle 3; 12]; 14$   
d)  $\langle -12; -3]; -15$   
e)  $\langle -12; -3]; -13$

19. Si:

$$A = \langle -\infty; -5]; B = \langle -5; +\infty \rangle$$

calcula:  $A \cup B$

- a)  $-5$       c)  $\emptyset$       e)  $\mathbb{R}$   
b)  $5$       d)  $\langle -5; 5 \rangle$

20. Si:

$$A = \langle -4; 7] \wedge B = [1; 5)$$

Calcula:  $A \cup B$

- a)  $\langle 4; 7 \rangle$       c)  $\langle -4; 7 \rangle$       e)  $\langle 4; 7]$   
b)  $\langle -4; 7 \rangle$       d)  $[1; 5)$

21. Si:

$$A = \langle -5; 6 \rangle \wedge B = [2; 4)$$

calcula:  $A \cap B$

- a)  $\langle 2; 4]$   
b)  $[2; 4]$   
c)  $\langle 2; 4 \rangle$   
d)  $[2; 4)$   
e)  $\langle -5; 6 \rangle$

22. Grafica, expresa como intervalo y señala la suma de todos los valores enteros positivos que puede tomar «x» en la siguiente expresión:

$$x \leq 3$$

- a) 9                      c) 6                      e) 4  
b) 5                      d) 8

23. Si:

$$A = [-2; 4]$$

$$B = \langle 1; 7 \rangle$$

Calcula la cantidad de números enteros que puede tomar «x» en  $A \cap B$ .

- a) 4                      c) 3                      e) 6  
b) 8                      d) 5

24. Si  $x \in \mathbb{Z}^- \wedge x \in \langle -6; 4 \rangle$

determina la cantidad de valores que puede tomar «x».

- a) 3                      d) 6  
b) 4                      e) 7  
c) 5

25. Si  $x \in \mathbb{N} \wedge x \in \langle -3; 4 \rangle$

determina la suma de todos los valores que puede tomar «x».

- a) 9                      d) 13  
b) 11                      e) 10  
c) 12

## Esquema formulario

Intervalo abierto:  $\langle a; b \rangle$  o  $]a; b[$

Intervalo cerrado:  $[a; b]$

Intervalo semiabierto:

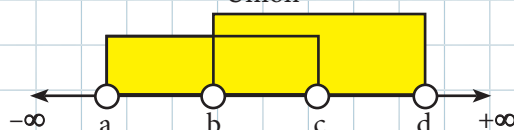
$\langle a; b \rangle$  o  $]a; b]$

$[a; b \rangle$  o  $[a; b[$



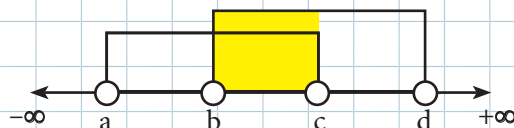
### Operación con intervalos

Unión



$\cup : [a; b]$

Intersección



$\cap : [b; c]$

## • Tarea

### Integral

1. Grafica e identifica con un intervalo la siguiente expresión:  
 $-5 \leq x < 6$   
 a)  $[-5; 6)$       d)  $\langle -5; 6 \rangle$   
 b)  $[5; 6)$       e)  $\langle 5; 6 \rangle$   
 c)  $[5; 5]$
2. Expresa como intervalo y determina el mayor valor entero que puede tomar «x».  
 $-7 \leq x < 10$   
 a)  $\langle 7; 10 \rangle; 9$   
 b)  $[-7; 10]; 9$   
 c)  $[-7; 10]; 10$   
 d)  $\langle -7; 10 \rangle; 9$   
 e)  $[7; 10]; 9$
3. Grafica, expresa como intervalo y calcula la suma del mayor y menor valor entero que puede tomar «x» en la siguiente expresión:  
 $-8 < x < 12$   
 a)  $\langle -8; 12 \rangle; 4$   
 b)  $\langle 8; 12 \rangle; 5$   
 c)  $\langle -8; 12 \rangle; 11$   
 d)  $[-8; 12]; 4$   
 e)  $[8; 12]; 7$
4. Si  $x \in [-5; 5]$ , determina la cantidad de valores que puede tomar «x».  
 a) 9      d) 8  
 b) 10      e) 12  
 c) 11

### PUCP

5. Si:  
 $A = \langle 2; 7 \rangle$   
 $B = \langle -3; 4 \rangle$   
 calcula:  $A \cup B$   
 a)  $\langle 3; 7 \rangle$   
 b)  $\langle -3; 7 \rangle$   
 c)  $[-3; 7]$   
 d)  $\langle 2; 4 \rangle$   
 e)  $\langle -3; 7 \rangle$
6. Si:  
 $A = \langle -1; 6 \rangle$   
 $B = [2; 8]$   
 calcula:  $A \cap B$   
 a)  $[2; 6]$   
 b)  $\langle 2; 6 \rangle$   
 c)  $\langle 2; 6 \rangle$   
 d)  $[-2; 6]$   
 e)  $[2; 6]$
7. Si  $x \in \mathbb{Z} \wedge x \in [-4; 7]$ , determina la cantidad de valores que puede tomar «x».  
 a) 9  
 b) 11  
 c) 12  
 d) 13  
 e) 10
8. Si:  
 $A = \langle -\infty; 3 \rangle \wedge B = \langle -2; +\infty \rangle$   
 calcula:  $A \cup B$   
 a)  $\phi$   
 b)  $[3; +\infty)$   
 c)  $\langle -2; +\infty \rangle$   
 d)  $\mathbb{R}$   
 e)  $\langle -2; 3 \rangle$

### UNMSM

9. Si  $x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \in \langle -6; 4 \rangle$  determina la cantidad de valores que puede tomar «x».  
 a) 4      d) 10  
 b) 11      e) 8  
 c) 5
10. Si  $x \in \mathbb{N} \wedge x \in \langle -7; 5 \rangle$  determina la suma de los valores que puede tomar «x».  
 a) 13  
 b) 14  
 c) 15  
 d) 16  
 e) 17
11. Determina el intervalo al cual pertenece:  
 $3x - 7 < -x + 5$   
 a)  $\langle -\infty; 3 \rangle$   
 b)  $\langle -\infty; 3 \rangle$   
 c)  $\langle 3; +\infty \rangle$   
 d)  $[3; +\infty)$   
 e)  $\langle -\infty; -3 \rangle$
12. Determina el intervalo al cual pertenece:  
 $3x - 10 \geq -8x + 30$   
 a)  $\langle 40; +\infty \rangle$   
 b)  $\left[ \frac{40}{11}; +\infty \right)$   
 c)  $\left\langle \frac{11}{40}; +\infty \right\rangle$   
 d)  $\left\langle \frac{40}{11}; +\infty \right\rangle$   
 e)  $\langle 3; +\infty \rangle$

UNI

13. Determina el intervalo al cual pertenece:

I.  $4x > 20$

II.  $-5x \leq 30$

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $[5; +\infty)$        | d) $\langle 5; +\infty)$ |
| $[6; +\infty)$           | $\langle 6; +\infty)$    |
| b) $[5; +\infty)$        | e) $\langle 5; +\infty)$ |
| $\langle -\infty; -6]$   | $\langle -6; +\infty)$   |
| c) $\langle 5; +\infty)$ |                          |
| $[-6; +\infty)$          |                          |

14. Si  $x \in \mathbb{Z}^- \wedge x \in \langle -8; 10]$ , determina la suma del menor y mayor valor entero que puede tomar «x».

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| a) -8 | c) -6 | e) -9 |
| b) -7 | d) -5 |       |

15. Expresa como intervalo:

$$-5x - 30 \geq 3x - 14$$

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $\langle -\infty; 2)$  | d) $[-2; +\infty)$        |
| b) $\langle -\infty; -2]$ | e) $\langle -\infty; -2)$ |
| c) $\langle -\infty; 2]$  |                           |



# CONSTRUCCIÓN DE INTERVALOS

## Capítulo 17

Para construir intervalos debemos tener en cuenta las propiedades de las desigualdades.

1. Si:

$$a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc$$

(Al multiplicar la desigualdad por un número positivo, la desigualdad no cambia)

2. Si:

$$a < b \wedge c > 0 \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

(Al dividir la desigualdad por un número positivo, la desigualdad no cambia)

3. Si:

$$a < b \wedge c < 0 \rightarrow ac > bc$$

(Al multiplicar a la desigualdad un número negativo, la desigualdad cambia)

4. Si:

$$a < b \wedge c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

(Al dividir a la desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia)

5. Si:

$$0 < a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

(Cuando se toma la inversa de dos cantidades positivas, la desigualdad cambia)

6. Si:

$$a < b < 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

(Cuando se toma la inversa de dos cantidades negativas, la desigualdad cambia)

7. Si:

$$a < x < b \text{ con } a; b > 0 \\ \rightarrow a^2 < x^2 < b^2$$

8. Si:

$$a < x < b \text{ con } a; b < 0 \\ \rightarrow b^2 < x^2 < a^2$$

9. Si:

$$a < x < b \text{ con } a < 0 \wedge b > 0 \\ \rightarrow 0 \leq x^2 < \text{MÁX} \{a^2; b^2\}$$

**Ejemplos:**

Si:

$$3 \leq x < 7 \\ \rightarrow 9 \leq x^2 < 49$$

Si:

$$-4 < x \leq -2 \\ \rightarrow 4 \leq x^2 < 16$$

Si:

$$-5 < x \leq 3; \text{MÁX} \{(-5)^2; 3^2\} = 25 \\ \rightarrow 0 \leq x^2 < 25$$



## Trabajando en clase

### Integral

1. Si:  $x \in \langle -2; 5 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $2x + 1$ .
2. Si:  $x \in \langle -6; -2 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $\frac{x}{2} + 1$ .
3. Si:  $x \in [4; 7]$ , determina el intervalo al cual pertenece  $\frac{x+2}{3}$ .

### Católica

4. Si:  $x \in \langle -3; 2 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $\frac{-3x+5}{3}$ .

#### Resolución:

$$\begin{aligned}
 x \in \langle -3; 2 \rangle &\Rightarrow (-3 < x \leq 2)(-3) \\
 &\quad \swarrow \quad \searrow \\
 &(-6 \leq -3x < 9) + 5 \\
 &(-1 \leq -3x + 5 < 14) \div 2 \\
 &-\frac{1}{2} \leq \frac{-3x+5}{2} < 7 \\
 \rightarrow \frac{-3x+5}{2} &\in \left[ -\frac{1}{2}; 7 \right)
 \end{aligned}$$

Rpta.:  $\left[ -\frac{1}{2}; 7 \right)$

5. Si:  $x \in \langle -4; 3 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $\frac{-2x+3}{2}$ .
6. Si:  $x \in [1; 6]$ , determina el intervalo al cual pertenece  $\frac{2x}{3} - 2$ .
7. Si:  $x \in \langle -1; 4 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $\frac{x+2}{3} - 1$ .

### UNMSM

8. Si:  $x \in \langle 2; 7 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $5 + \frac{2}{x}$ .

#### Resolución:

$$\text{Si } x \in \langle 2; 7 \rangle \Rightarrow 2 < x < 7$$

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{1}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \right) (2) \\
 &\left( \frac{2}{7} < \frac{2}{x} < 1 \right) + 5 \\
 &\left( \frac{2}{7} + 5 < 5 + \frac{2}{x} < 1 + 5 \right) \\
 &\frac{37}{7} < 5 + \frac{2}{x} < 6
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow 5 + \frac{2}{x} \in \left\langle \frac{37}{7}; 6 \right\rangle$$

9. Si:  $x \in \langle 3; 6 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $3 + \frac{5}{x}$ .
10. Si:  $x \in \langle -2; 3 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $\frac{3}{x+4} - 1$ .
11. Si:  $x \in [-5; -3]$ , determina el intervalo al cual pertenece  $2 + \frac{3}{4x}$ .

### UNI

12. Si:  $x \in \langle -2; 3 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $M = (x+4)^2 - 3$ .

#### Resolución:

$$\begin{aligned}
 \text{Como } x \in \langle -2; 3 \rangle &\Rightarrow (-2 < x \leq 3) + 4 \\
 \text{Elevo al cuadrado } &(2 < x+4 \leq 7) \\
 &(4 < (x+4)^2 \leq 49) - 3 \\
 &1 < (x+4)^2 - 3 \leq 46 \\
 &\Rightarrow 1 < M \leq 46
 \end{aligned}$$

$$\therefore M \in \langle 1; 46 \rangle$$

Rpta.:  $M \in \langle 1; 46 \rangle$

13. Si:  $x \in [-2; 3]$ , determina el intervalo al cual pertenece  $M = (x+4)^2 - 1$ .
14. Si:  $x \in \langle 3; 7 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece  $M = (x-8)^2 + 3$ .

## Sigo practicando

16. Si  $x \in [-3; -1]$ , determina a qué intervalo pertenece:

$$2x + 6$$

a)  $[0; 4]$

b)  $[0; 4]$

c)  $\langle 0; 4 \rangle$

d)  $\langle 0; 4]$

e)  $[-1; 4]$

17. Si  $x \in \langle -6; 10]$ , determina a qué intervalo pertenece:

$$\frac{3x}{2} + 4$$

a)  $\langle 4; 19 \rangle$

b)  $\langle -5; 19]$

c)  $[5; 19]$

d)  $\langle 5; 19 \rangle$

e)  $\langle -5; 19 \rangle$

18. Si  $x \in [-4; 5]$ , determina a qué intervalo pertenece:

$$\frac{x+3}{5} - 2$$

a)  $\left[-\frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right]$

b)  $[-11; -2]$

c)  $\left[-\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right]$

d)  $\left[-\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right]$

e)  $\langle -11; -2 \rangle$

19. Si  $x \in \langle 2; 5]$ , determina a qué intervalo pertenece:

$$3 - \frac{2}{x}$$

a)  $\left\langle 2; \frac{13}{5} \right\rangle$

b)  $\left[2; \frac{13}{5}\right]$

c)  $\left[2; \frac{13}{5}\right]$

d)  $\left\langle 2; \frac{13}{5} \right]$

e)  $\langle 2; 3 \rangle$

20. Si  $x \in [-4; 3]$ , determina a qué intervalo pertenece:

$$\frac{4x}{3} - 1$$

a)  $\left\langle -\frac{19}{3}; 3 \right\rangle$

b)  $\left[-\frac{19}{3}; 3\right]$

c)  $[-19; 3]$

d)  $\left\langle -\frac{19}{3}; 3 \right]$

e)  $[-19; 3]$

23. Si  $x \in [-5; -3]$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$2 + \frac{3}{x+8}$$

a)  $\left\langle \frac{13}{5}; 4 \right]$

d)  $\left[ \frac{13}{5}; 3 \right]$

b)  $\left\langle \frac{13}{5}; 3 \right]$

e)  $\left[ \frac{13}{5}; 3 \right\rangle$

c)  $\left\langle \frac{13}{5}; 3 \right\rangle$

25. Si  $x \in \langle 1; 9 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$1 + \frac{3}{2x}$$

a)  $\left[ \frac{7}{6}; \frac{5}{2} \right]$

d)  $\left[ \frac{7}{6}; \frac{5}{2} \right\rangle$

b)  $\left\langle \frac{7}{6}; \frac{5}{2} \right\rangle$

e)  $\left[ \frac{6}{7}; \frac{5}{2} \right\rangle$

c)  $\left\langle \frac{7}{6}; \frac{5}{2} \right]$

24. Si  $x \in [-4; 2]$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$\frac{5}{x+5} - 2$$

a)  $\langle -9; 3 \rangle$

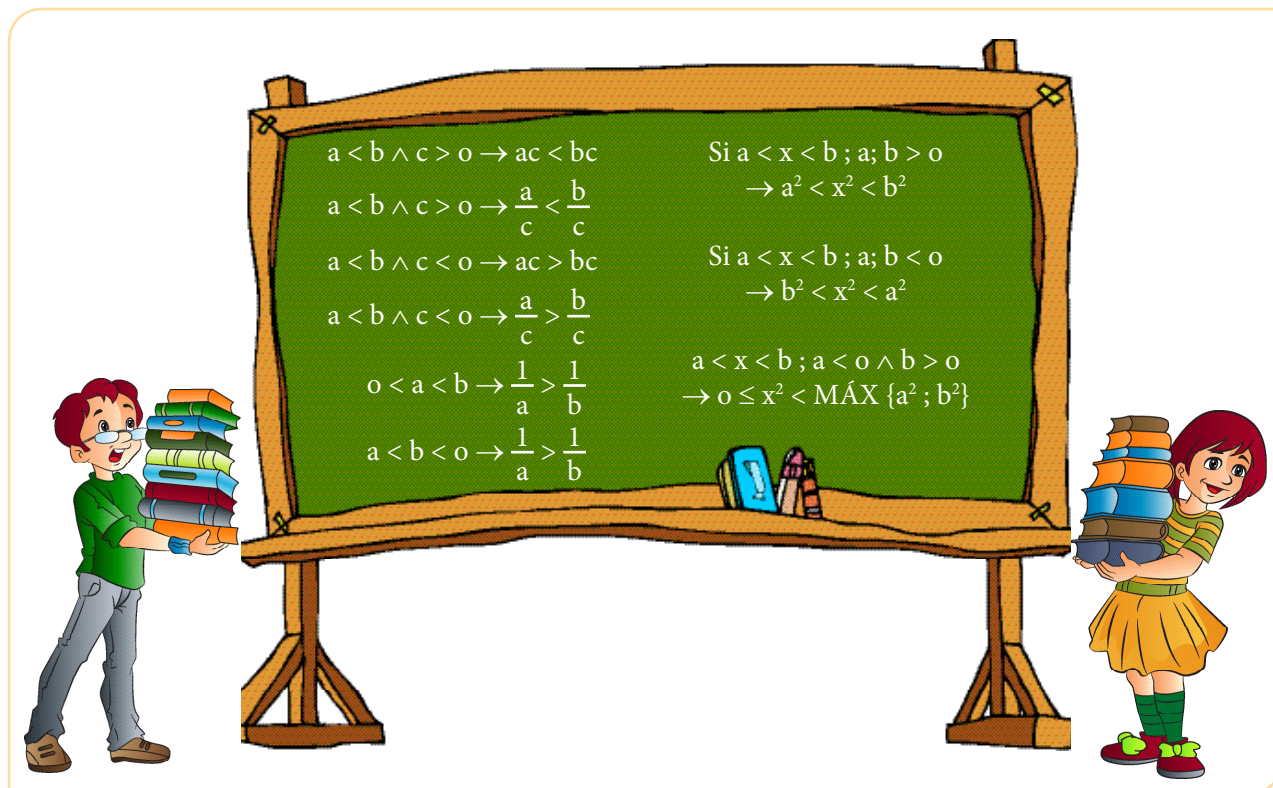
d)  $\left[ -\frac{9}{7}; 3 \right]$

b)  $[-9; 3]$

e)  $\left\langle -\frac{9}{7}; 3 \right\rangle$

c)  $\left\langle -\frac{9}{7}; 3 \right]$

## Esquema formulario



# Tarea

## Integral

1. Si  $x \in [2; 5)$ , determina el intervalo al que pertenece:

$$3x + 4$$

- a)  $[10; 19]$  d)  $[9; 19]$   
b)  $\langle 10; 19 \rangle$  e)  $[10; 19]$   
c)  $\langle 10; 19 \rangle$

2. Si  $x \in [-2; 4)$ , determina el intervalo al que pertenece:

$$\frac{x}{3} + 1$$

- a)  $\left[\frac{1}{3}; 7\right]$   
b)  $\left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$   
c)  $\left\langle \frac{1}{3}; \frac{7}{3} \right\rangle$   
d)  $\left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$   
e)  $[1; 7]$

3. Si  $x \in [5; 10)$ , determina el intervalo al que pertenece:

$$\frac{x+4}{3}$$

- a)  $\left[3; \frac{14}{3}\right]$   
b)  $\left\langle 3; \frac{14}{3} \right\rangle$   
c)  $\left[3; \frac{14}{3}\right]$   
d)  $[3; 14]$   
e)  $\langle 3; 14 \rangle$

4. Si  $x \in [-7; 2)$ , determina al intervalo al que pertenece:

$$2x - 1$$

- a)  $\langle -15; 3 \rangle$  d)  $\langle -15; 3 \rangle$   
b)  $[-15; 3]$  e)  $[3; 15]$   
c)  $[-15; 3]$

## PUCP

5. Si  $x \in \langle 2; 7 \rangle$ , determina al intervalo al que pertenece:

$$\frac{3x}{2} - 1$$

- a)  $\left\langle 2; \frac{19}{2} \right\rangle$  d)  $[2; 19]$   
b)  $\left[2; \frac{19}{2}\right]$  e)  $\langle 2; 19 \rangle$   
c)  $\left[2; \frac{19}{2}\right]$

6. Si  $x \in \langle -2; 5 \rangle$ , determina el intervalo al que pertenece:

$$\frac{x-2}{5} + 3$$

- a)  $\langle 11; 18 \rangle$  d)  $\left\langle 11; \frac{18}{5} \right\rangle$   
b)  $\left\langle \frac{11}{5}; \frac{18}{5} \right\rangle$  e)  $[11; 18]$   
c)  $\left\langle \frac{11}{5}; 18 \right\rangle$

7. Si  $x \in \langle -3; 2 \rangle$ , determina al intervalo al cual pertenece:

$$\frac{-3x+2}{4}$$

- a)  $\left[-1; \frac{11}{4}\right]$  d)  $\left\langle -1; \frac{11}{4} \right\rangle$   
b)  $\left\langle -1; \frac{11}{4} \right\rangle$  e)  $\left\langle 1; \frac{11}{4} \right\rangle$   
c)  $\left[-1; \frac{11}{4}\right]$

8. Si  $x \in [-5; -3]$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$2 - \frac{3}{4x}$$

- a)  $\left[\frac{21}{12}; \frac{37}{20}\right]$   
b)  $\left[\frac{21}{12}; \frac{37}{20}\right]$   
c)  $\left\langle \frac{21}{12}; \frac{37}{20} \right\rangle$   
d)  $\langle 21; 37 \rangle$   
e)  $\left[\frac{43}{20}; \frac{9}{4}\right]$

## UNMSM

9. Si  $x \in \langle -3; 4 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$\frac{5}{x+4} - 2$$

- a)  $\left\langle -\frac{11}{8}; 3 \right\rangle$   
b)  $\left[-\frac{11}{8}; 3\right]$   
c)  $[-11; 3]$   
d)  $\left\langle -11; \frac{3}{8} \right\rangle$   
e)  $\left[-\frac{11}{8}; 3\right]$

10. Si  $x \in [2; 8]$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$3 + \frac{2}{5x}$$

- a)  $\left\langle \frac{61}{20}, \frac{9}{5} \right\rangle$
- b)  $\left[ \frac{61}{20}, \frac{16}{5} \right]$
- c)  $\left[ \frac{61}{20}, \frac{9}{5} \right]$
- d)  $\left[ \frac{61}{20}, \frac{9}{5} \right]$
- e)  $\left\langle \frac{61}{20}, \frac{16}{5} \right\rangle$

11. Si  $x \in \langle 3; 6 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$4 - \frac{3}{x}$$

- a)  $\left[ 3; \frac{7}{2} \right]$
- b)  $\left[ 3; \frac{7}{2} \right]$
- c)  $\left\langle 3; \frac{7}{2} \right\rangle$
- d)  $\left\langle 3; \frac{7}{2} \right]$
- e)  $\left\langle -3; \frac{7}{2} \right\rangle$

12. Si  $x \in \langle 2; 7 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$5 + \frac{2}{x+1}$$

- a)  $\left\langle \frac{21}{4}, \frac{17}{3} \right\rangle$
- b)  $\left\langle \frac{21}{12}, \frac{37}{20} \right]$
- c)  $\left[ \frac{21}{12}, \frac{37}{20} \right]$
- d)  $\left[ \frac{21}{12}, \frac{37}{20} \right]$
- e)  $\langle 21; 37 \rangle$

13. Si  $x \in \langle -3; 5 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$(x+4)^2 - 3$$

- a)  $[4; 78]$
- b)  $\langle -2; 78 \rangle$
- c)  $\langle -2; 78 \rangle$
- d)  $[2; 78]$
- e)  $\langle 2; 78 \rangle$

14. Si  $x \in [2; 5]$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$M = (x-6)^2 + 3$$

- a)  $\langle 4; 19 \rangle$
- b)  $\langle 4; 19 \rangle$
- c)  $[4; 19]$
- d)  $\langle 2; 19 \rangle$
- e)  $\langle 5; 19 \rangle$

15. Si  $x \in \langle 1; 5 \rangle$ , determina el intervalo al cual pertenece:

$$(x-2)^2 + 1$$

- a)  $[1; 10]$
- b)  $\langle 1; 10 \rangle$
- c)  $[1; 10]$
- d)  $\langle 1; 10 \rangle$
- e)  $\langle 0; 10 \rangle$





# INECUACIÓN DE PRIMER GRADO I

## Capítulo 18

### Formas generales

$$ax + b > 0; ax + b < 0; ax + b \leq 0; ax + b \geq 0$$

$$\text{Si } a < b \wedge c < 0 \rightarrow ac > bc$$

Al multiplicar la inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

$$\text{Si } a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc$$

Al multiplicar la inecuación por un número positivo, la desigualdad no cambia de sentido.

$$\text{Si } a < b \wedge c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Al dividir la inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

$$\text{Si } a < b \wedge c > 0 \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Al dividir la inecuación por un número positivo, la desigualdad no cambia de sentido.

Ejemplos:

$$(3x < 8) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x < \frac{8}{3}$$

No cambia de sentido

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; 8/3 \rangle$$

$$(-5) \cdot (x \geq 11) \cdot -\frac{1}{5}$$

negativo

$$\Rightarrow x \leq -\frac{11}{5}$$

Cambia de sentido

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; -11/5 \rangle$$

### Trabajando en clase

#### Integral

1. Resuelve:  $2x - 5 > 3$
2. Resuelve:  $4x - 3 \leq 9$  e indica el mayor valor entero que puede tomar «x».

3. Resuelve:

$$\frac{2x + 1}{3} > 3$$

e indica el menor valor entero que puede tomar «x».

#### Católica

4. Resuelve:  $5x + 4 \leq -10$  e indica el mayor valor entero que puede tomar «x».

Resolución:

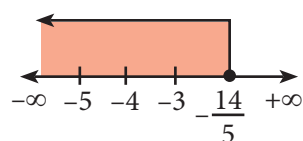
$$5x + 4 \leq -10$$

$$5x \leq -10 - 4$$

$$5x \leq -14$$

$$x \leq -\frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; -14/5 \rangle$$



Luego, el mayor valor que puede tomar «x» es -3.

5. Resuelve:  $3x - 2 \geq 8$  e indica el menor valor entero que puede tomar «x».
6. Resuelve:  $\frac{2x}{3} - 1 < 4$  e indica el mayor valor entero que puede tomar «x».

7. Resuelve:  $-3x + 1 < 7$  e indica el menor valor entero que puede tomar «x».

UNMSM

8. Resuelve:

$$\frac{-3x + 2}{4} > 7$$

e indica el mayor valor entero que puede tomar «x».

Resolución:

$$\frac{-3x + 2}{4} > 7$$

$$-3x + 2 > 28$$

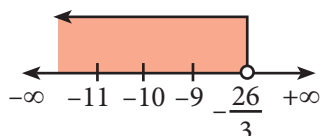
$$-3x > 28 - 2$$

$$(-3x > 26)(-1)$$

$$3x < -26$$

$$x < -\frac{26}{3}$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; -26/3 \rangle$$



Luego el mayor valor entero que puede tomar «x» es -9.

9. Resuelve:

$$\frac{-2x + 1}{5} \leq 2$$

e indica el menor valor que puede tomar «x».

10. Resuelve:

$$5x - \frac{1}{2} \geq -7$$

Da como respuesta el menor valor entero que puede tomar «x».

11. Resuelve:

$$(x + 1)(x + 4) \leq (x + 2)(x - 3)$$

Da como respuesta el mayor valor entero que puede tomar «x».

UNI

12. Resuelve:

$$\frac{x}{3} - \frac{7}{2} < 5 - \frac{x}{4}$$

Resolución:

$$\frac{x}{3} - \frac{7}{2} < 5 - \frac{x}{4}$$

$$\text{MCM}(3; 2; 4) = 12$$

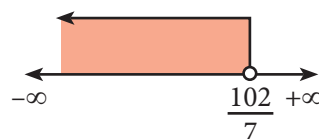
$$\Rightarrow \left( \frac{x}{3} - \frac{7}{2} < 5 - \frac{x}{4} \right) (12)$$

$$4x - 42 < 60 - 3x$$

$$4x + 3x < 60 + 42$$

$$7x < 102$$

$$x < \frac{102}{7}$$



$$\text{C. S.} = \langle -\infty; \frac{102}{7} \rangle$$

13. Resuelve:

$$\frac{x}{2} - \frac{4}{3} > 5 - \frac{x}{5}$$

14. Resuelve:

$$\frac{x - 2}{6} - \frac{x + 1}{3} \leq \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 1}{2}$$

e indica el mayor valor entero que puede tomar «x».

## Sigo practicando

16. Resuelve:  $3x - 15 < 18$

- |                                  |                                   |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\langle -\infty; 11 \rangle$ | d) $\langle 11; +\infty \rangle$  |
| b) $\langle -\infty; 11 ]$       | e) $\langle -\infty; -11 \rangle$ |
| c) $[ 11; +\infty \rangle$       |                                   |

17. Resuelve:

$4x - 3 \geq 17$  e indica el menor valor entero que puede tomar «x».

- |      |      |
|------|------|
| a) 2 | d) 5 |
| b) 3 | e) 6 |
| c) 4 |      |

18. Resuelve:

$$\frac{3x-1}{4} > 5$$

e indica el menor valor entero que puede tomar «x».

- |      |      |
|------|------|
| a) 5 | d) 8 |
| b) 6 | e) 9 |
| c) 7 |      |

19. Resuelve:

$$\frac{2x-2}{x-1} \geq 1; x \neq 1$$

- |                                 |                            |
|---------------------------------|----------------------------|
| a) $\langle -1; 1 \rangle$      | d) $\langle -\infty; -1 ]$ |
| b) $\langle 1; +\infty \rangle$ | e) $[ -1; +\infty \rangle$ |
| c) $[ 1; +\infty \rangle$       |                            |

20. Resuelve:  $\frac{4x}{5} - 2 > 3$  e indica el menor valor que puede tomar «x».

- |      |       |
|------|-------|
| a) 6 | d) 9  |
| b) 7 | e) -7 |
| c) 8 |       |

21. Resuelve:  $-2x + 6 \leq 18$  e indica el menor valor entero que puede tomar «x».

- |      |       |
|------|-------|
| a) 5 | d) -6 |
| b) 6 | e) -7 |
| c) 7 |       |

22. Resuelve:

$$\frac{x+1}{3} > \frac{x-1}{5}$$

- a)  $\langle -4; +\infty \rangle$       d)  $[4; +\infty \rangle$   
 b)  $[-4; +\infty \rangle$       e)  $\langle -4; 4 \rangle$   
 c)  $\langle 4; +\infty \rangle$

23. Resuelve:

$$2(x-3) + 3(x-2) > 4(x-1)$$

- a)  $\langle 8; +\infty \rangle$       d)  $[-8; +\infty \rangle$   
 b)  $[8; +\infty \rangle$       e)  $\langle -8; 8 \rangle$   
 c)  $\langle -8; +\infty \rangle$

24. Resuelve:  $\frac{3x}{2} - 4 \leq 6$  e indica el mayor valor entero que puede tomar «x».

- a) 3      d) 6  
 b) 4      e) 7  
 c) 5

25. Resuelve:

$$(x-2)(x-1) \geq (x+3)(x+1)$$

- a)  $\langle -\infty; -\frac{1}{7} \rangle$       d)  $[\frac{1}{7}; +\infty \rangle$   
 b)  $\langle -\infty; -\frac{1}{7} \rangle$       e)  $\langle \frac{1}{7}; +\infty \rangle$

## Esquema formulario

$$a < b \wedge c < 0 \rightarrow ac > bc$$

$$a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc$$

$$a < b \wedge c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$a < b \wedge c > 0 \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

# Tarea

## Integral

- Resuelve:  $3x - 4 < 17$   
 a)  $\langle -\infty; 6 \rangle$  d)  $\langle -\infty; 7 \rangle$   
 b)  $[7; +\infty)$  e)  $\langle 7; +\infty \rangle$   
 c)  $\langle -\infty; 7 \rangle$
- Resuelve:  $5x + 1 > 16$ . Da como respuesta el menor valor entero que puede tomar «x».  
 a) 3 d) 6  
 b) 4 e) 7  
 c) 5
- Resuelve:  

$$\frac{4x - 6}{2} \leq 3$$
 Indica el mayor valor entero que puede tomar «x».  
 a) 1 d) 4  
 b) 2 e) 5  
 c) 3
- Resuelve:  

$$\frac{3x}{4} - 5 \geq 2$$
 a)  $\left[ \frac{28}{3}; +\infty \right)$  d)  $\left\langle -\infty; \frac{28}{3} \right]$   
 b)  $\left\langle \frac{28}{3}; +\infty \right)$  e)  $\left\langle -\infty; -\frac{28}{3} \right]$   
 c)  $\left\langle -\infty; -\frac{28}{3} \right\rangle$

## PUCP

- Resuelve:  $5x - 6 \geq 7$ . Indica el menor valor entero que puede tomar «x».

- a) 5 d) 2  
 b) 1 e) 3  
 c) 4

- Resuelve:  $-4x - 5 \geq 3$ , luego indica su conjunto solución.

- a)  $\langle -2; +\infty \rangle$  d)  $\langle 1; +\infty \rangle$   
 b)  $\langle -\infty; -2 \rangle$  e)  $[-2; +\infty)$   
 c)  $[2; +\infty)$

- Resuelve:

$$5 - \frac{x}{4} > \frac{3x}{2} - 2$$

- a)  $\langle -\infty; 4 \rangle$  d)  $[4; +\infty)$   
 b)  $\langle -\infty; 4 \rangle$  e)  $\langle 4; +\infty \rangle$   
 c)  $\langle -\infty; -4 \rangle$

- Resuelve:

$$\frac{2x - 5}{4} \leq 3 + x$$

- a)  $\left\langle -\frac{17}{2}; +\infty \right\rangle$   
 b)  $\left[ -\frac{17}{2}; +\infty \right)$   
 c)  $\left[ \frac{17}{2}; +\infty \right)$   
 d)  $\left\langle \frac{17}{2}; +\infty \right\rangle$   
 e)  $\left\langle -\infty; \frac{17}{2} \right\rangle$

## UNMSM

- Resuelve:

$$3x + \frac{2}{3} > -3$$

Da como respuesta el menor valor entero que puede tomar «x».

- a) 3 d) -2  
 b) 1 e) -1  
 c) 2

- Resuelve:

$$(x + 2)(x - 1) \geq (x + 3)(x + 1)$$

- a)  $\left\langle -\infty; -\frac{5}{3} \right\rangle$   
 b)  $\left\langle -\infty; -\frac{5}{8} \right\rangle$   
 c)  $\left\langle -\infty; \frac{5}{3} \right\rangle$   
 d)  $\left\langle -\infty; -\frac{5}{3} \right]$   
 e)  $\left\langle -\frac{5}{3}; +\infty \right]$

- Resuelve:

$$\frac{x - 1}{3} - \frac{x + 2}{2} \leq 4$$

- a)  $\langle -1; +\infty \rangle$  d)  $[32; +\infty)$   
 b)  $[-32; +\infty)$  e)  $\langle -32; 32 \rangle$   
 c)  $\langle 32; +\infty \rangle$

- Resuelve:

$$7 - \frac{x}{2} > \frac{5x}{3} - 6$$

- a)  $\langle -\infty; 6 \rangle$  d)  $\langle -\infty; -6 \rangle$   
 b)  $\langle -\infty; 6 \rangle$  e)  $\langle -6; 6 \rangle$   
 c)  $\langle -\infty; -6 \rangle$

**UNI**

13. Resuelve:  $\frac{x}{5} - \frac{3}{2} < 2 - \frac{x}{3}$

Indica el mayor valor entero que puede tomar «x».

- a) 15                      d) 18
- b) 16                      e) 19
- c) 17

14. Resuelve:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} \leq \frac{x-3}{4}$$

e indica el menor valor entero que puede tomar «x».

- a) 5                      d) -6
- b) -5                      e) -3
- c) -4

15. Resuelve:

$$\frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{5} \leq 1$$

- a)  $\langle -\infty; 33 \rangle$
- b)  $\langle -\infty; 33]$
- c)  $\langle -\infty; -33 \rangle$
- d)  $\langle -\infty; -33]$
- e)  $[-33; 33]$



# ALFONSO UGARTE SCHOOL

*Never stop learning because life never stops teaching*

**Geometría  
Segundo Año**





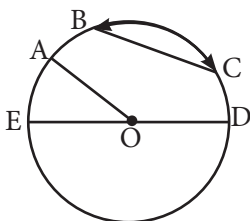
# LA CIRCUNFERENCIA: PROPIEDADES

## Capítulo

13

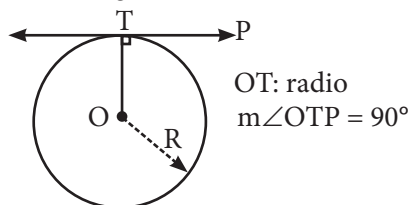
### Circunferencia

Es el conjunto de puntos de un plano, que equidistan de otro llamado centro «O», donde  $\overline{OA}$  se llama radio. Además, sus elementos son:  $\overline{BC}$  cuerda y  $\widehat{BC}$  arco. Si una cuerda contiene el centro, se le llama diámetro  $\overline{ED}$ .

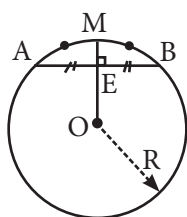


### Propiedades

1. En toda circunferencia, el radio que interseca a una recta tangente en el punto de tangencia, forma un ángulo recto con la recta.



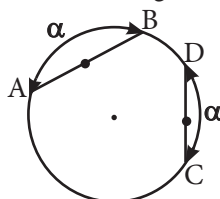
2. En toda circunferencia, el radio que es perpendicular a toda cuerda, la biseca. Y también biseca al arco que define la cuerda sobre la circunferencia.



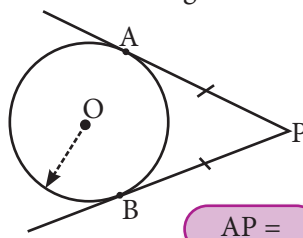
$\overline{OM}$  es radio;  $\overline{ME}$ : flecha;  
 $\overline{AB}$ : cuerda;  $\overline{OM} \perp \overline{AB}$   
Luego,  $AE = EB$   
En el arco  $\widehat{AMB}$ , se cumple  
 $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

Además, se llama flecha relativa a la cuerda  $\overline{AB}$ , la porción del radio  $\overline{ME}$  comprendida entre la cuerda y la circunferencia.

3. En una circunferencia, en la que se han trazado 2 cuerdas de la misma longitud, estas determinan arcos de igual medida.

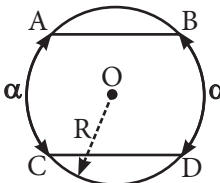


4. En toda circunferencia, los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior tienen la misma longitud.



Donde A y B son puntos de tangencia.

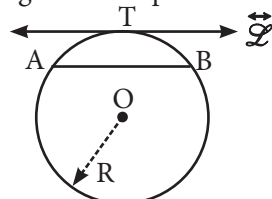
5. En toda circunferencia, las cuerdas paralelas determinan arcos de igual medida entre las paralelas.



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ; luego  $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$

6. En toda circunferencia, al trazar una cuerda paralela a una recta tangente, el arco determinado por la cuerda queda dividido en 2 arcos de igual

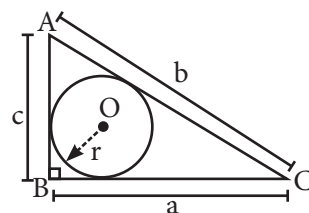
longitud, donde el punto de tangencia es el punto medio.



$\vec{L}$ ; recta tangente  $\vec{L} \parallel \overline{AB}$   
Luego,  $m\widehat{AT} = m\widehat{TB}$   
El punto T es punto medio del arco  $\widehat{AB}$ .

### Teorema de Poncelet

En todo triángulo rectángulo, la suma de longitudes de los catetos es igual a la longitud de la hipotenusa más el doble del inradio.



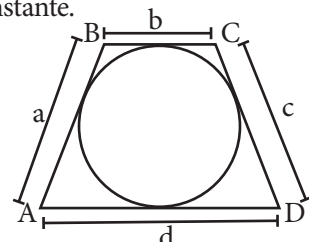
$$AB + BC = AC + 2R$$

$$c + a = b + 2R$$

r: inradio del  $\triangle ABC$

### Teorema de Pitot

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de los lados opuestos es constante.

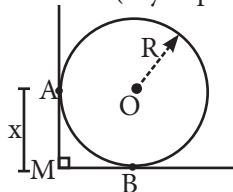


$$AB + CD = BC + AD$$

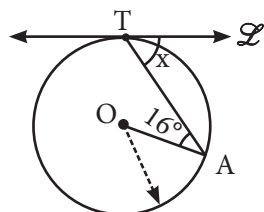
$$a + c = b + d$$

# Trabajando en clase

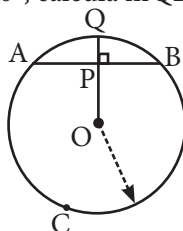
1. Calcula «x» si  $R = 3$  m (A y B: puntos de tangencia)



2. Calcula «x» si T es punto de tangencia. ( $\mathcal{L}$ : recta tangente)

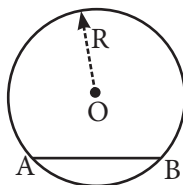


3. Si  $m\widehat{ACB} = 200^\circ$ , calcula  $m\widehat{QB}$ .



PUCP

4. Si  $R = 13$  m y la distancia de O hacia  $\overline{AB}$  es 5 m, calcula AB.

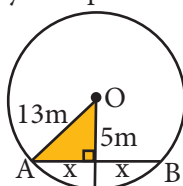


## Resolución

Piden:  $AB = 2x$

Trazamos  $R \perp \overline{AB}$

Trazamos  $\overline{OA}$ , y reemplazamos los datos.



Por el teorema de Pitágoras, en el triángulo sombreado.

$$\text{Luego: } x^2 + 5^2 = 13^2$$

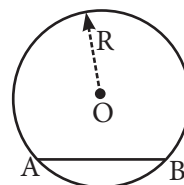
$$x^2 + 25 = 169$$

$$x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \text{ m}$$

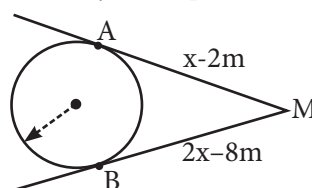
Finalmente,  $AB = 2(12)$

$$\Rightarrow AB = 24 \text{ m}$$

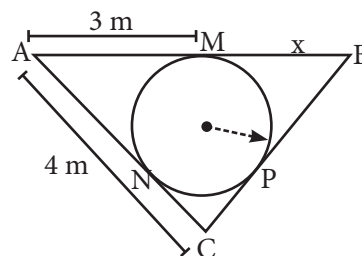
5. Si  $R = 17$  m y la distancia de O hacia  $\overline{AB}$  es 8 m, calcula AB.



6. Calcula «x», si A y B son puntos de tangencia.

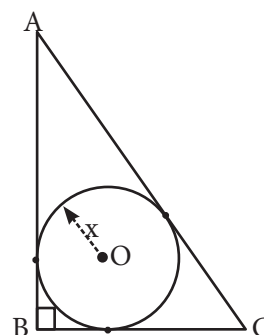


7. Calcula «x» si  $BC = 6$  m, además M, N y P son puntos de tangencia.



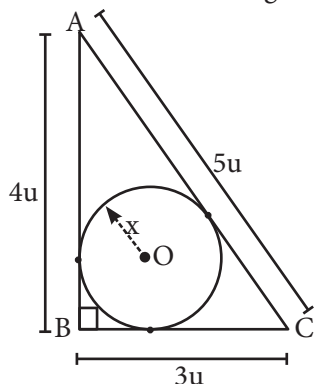
UNMSM

8. Calcula «x» si  $AB = 4u$  y  $BC = 3u$ .



**Resolución:**

Reemplazando los datos en la figura, tenemos:



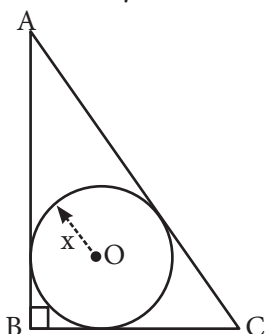
El  $\triangle BAC$  es pitagórico

Finalmente, por el teorema de Pitágoras tenemos:

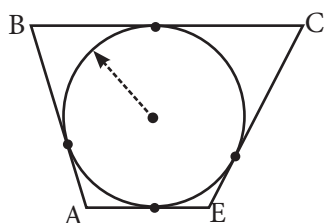
$$3 + 4 = 5 + 2x$$

$$7 = 5 + 2x \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1 \text{ u}$$

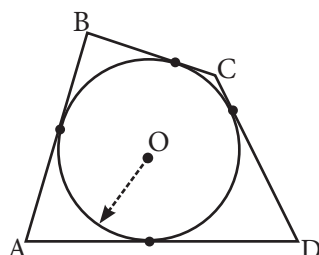
9. Calcula  $x$  si  $AB = 15 \text{ m}$  y  $BC = 8 \text{ m}$ .



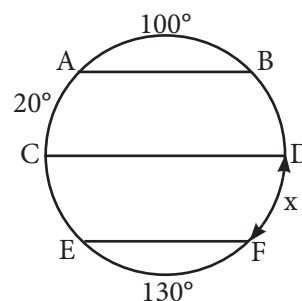
10. Calcula  $BC$  si  $AE = 4 \text{ m}$ ,  $AB = 5 \text{ m}$  y  $EC = 8 \text{ m}$ .



11. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD si se sabe que  $AB = 10 \text{ cm}$  y  $CD = 8 \text{ cm}$ .



12. Calcula « $x$ », si  $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF}$ .



**Resolución:**

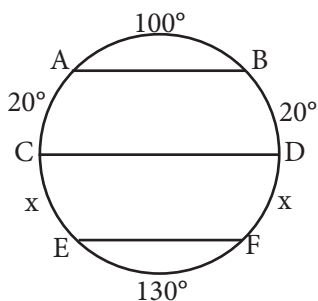
Piden: « $x$ »

Puesto que  $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF}$

$$m\widehat{AC} = m\widehat{BD} = 20^\circ$$

$$m\widehat{CE} = m\widehat{DF} = x$$

Luego tenemos:



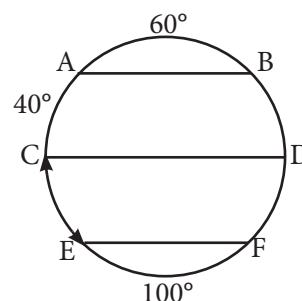
La medida angular de la circunferencia es  $360^\circ$ .

$$2x + 2(20^\circ) + 100^\circ + 130^\circ = 360^\circ$$

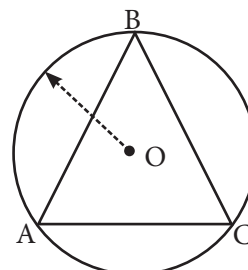
$$2x + 270^\circ = 360^\circ$$

$$2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$

13. Si  $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF}$ , calcula  $m\widehat{CE}$ .



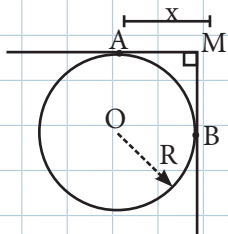
14. Calcula  $m\widehat{AB}$ ; si el triángulo equilátero ABC, está inscrito en la circunferencia.



• SIGO PRACTICANDO

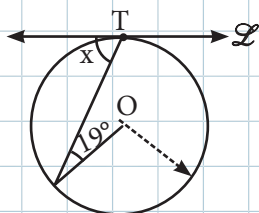
16. Calcula «x» si  $R = 7$  cm.

- a) 4 cm
- b) 5 cm
- c) 6 cm
- d) 7 cm
- e) 8 cm



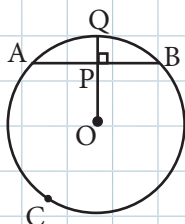
17. Calcula «x» si T es punto de tangencia. ( $\vec{\mathcal{L}}$ : es recta tangente)

- a)  $70^\circ$
- b)  $71^\circ$
- c)  $72^\circ$
- d)  $73^\circ$
- e)  $75^\circ$



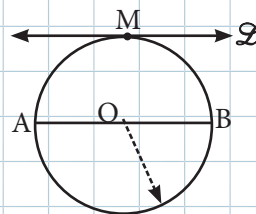
18. Si  $m\widehat{ACB} = 260^\circ$ , calcula  $m\widehat{QB}$ , «O» es centro.

- a)  $48^\circ$
- b)  $49^\circ$
- c)  $50^\circ$
- d)  $52^\circ$
- e)  $54^\circ$



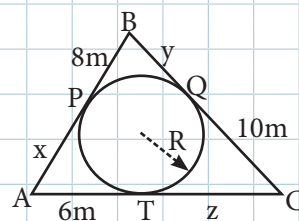
19. Si AB es diámetro y  $\overline{AB} \parallel \vec{\mathcal{L}}$ , calcula  $m\widehat{MB}$ .

- a)  $82^\circ$
- b)  $86^\circ$
- c)  $90^\circ$
- d)  $92^\circ$
- e)  $98^\circ$



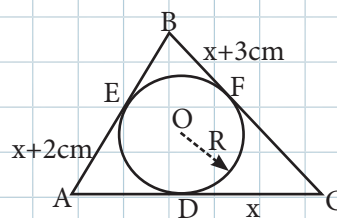
20. Calcula «x + y + z», si P, Q y T son puntos de tangencia.

- a) 18 m
- b) 20 m
- c) 22 m
- d) 24 m
- e) 26 m



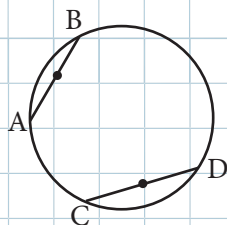
21. Si la longitud del perímetro del triángulo ABC es 40 cm, calcula «x», sabiendo que D, E y F son puntos de tangencia.

- a) 2 cm
- b) 3 cm
- c) 4 cm
- d) 5 cm
- e) 6 cm



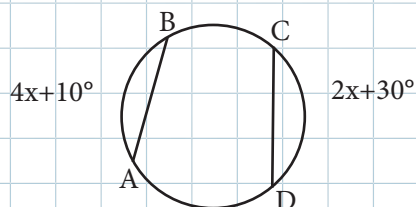
22. Calcula  $m\widehat{AB}$ , si  $m\widehat{AC} = 20^\circ$  y  $m\widehat{BD} = 160^\circ$ .

- a)  $70^\circ$
- b)  $72^\circ$
- c)  $74^\circ$
- d)  $78^\circ$
- e)  $90^\circ$



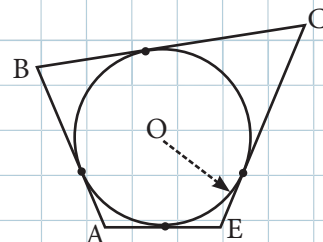
23. Calcula «x», si  $AB = CD$ .

- a)  $5^\circ$
- b)  $8^\circ$
- c)  $9^\circ$
- d)  $10^\circ$
- e)  $12^\circ$



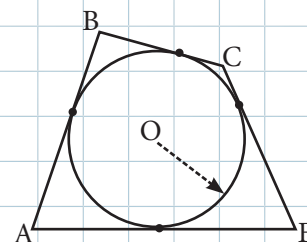
24. Calcula BC si  $AE = 10u$ ,  $AB = 12u$  y  $EC = 16u$ .

- a) 12 u
- b) 14 u
- c) 16 u
- d) 18 u
- e) 20 u

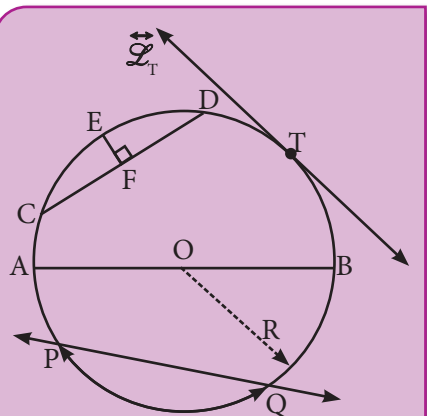


25. Calcula la longitud del perímetro del cuadrilátero ABCD, si se sabe que  $AB = 10\text{ m}$  y  $CD = 6\text{ m}$ .

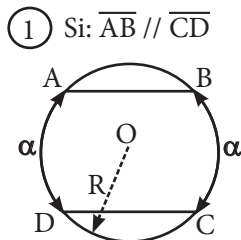
- a) 30 m
- b) 31 m
- c) 32 m
- d) 34 m
- e) 36 m



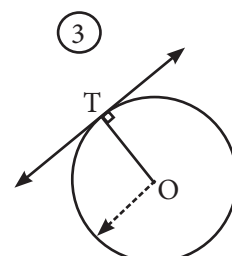
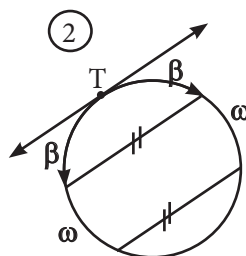
# • Esquema formulario



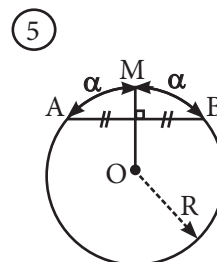
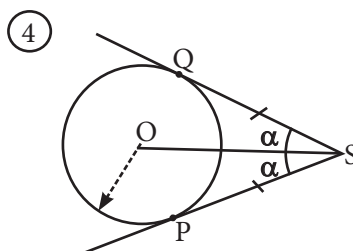
Cuerda:  $\overline{CD}$   
 Diámetro:  $\overline{AB}$   
 Secante:  $\overleftrightarrow{PQ}$   
 Arco:  $\widehat{PQ}$   
 Tangente:  $\overleftrightarrow{TT}$   
 Punto de tangencia: T  
 Flecha:  $\overline{EF}$



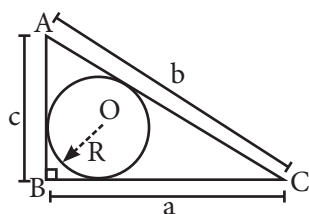
T: Punto de tangencia (para 2 y 3)



T y Q: puntos de tangencia



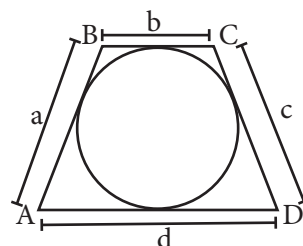
## Teorema de Poncelet



$$AB + BC = AC + 2R$$

$$c + a = b + 2R$$

## Teorema de Pitot



$$AB + CD = BC + AD$$

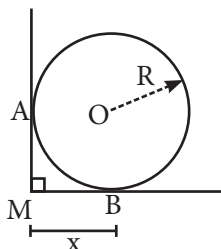
$$a + c = b + d$$

# Tarea

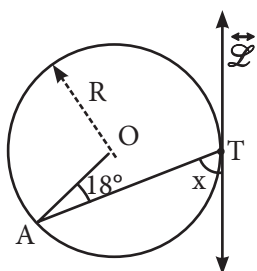
## Integral

1. Calcula  $x$ , si  $R = 6$  cm.

- a) 2 cm  
b) 3 cm  
c) 5 cm  
d) 6 cm  
e) 8 cm



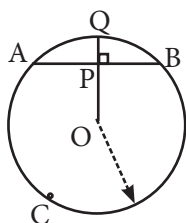
2. Calcula « $x$ » si  $t$  es punto de tangencia (L: recta tangente)



- a)  $50^\circ$   
b)  $62^\circ$   
c)  $72^\circ$   
d)  $74^\circ$   
e)  $76^\circ$

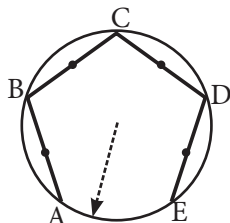
3. Si  $m\widehat{ACB} = 210^\circ$ , calcula  $m\widehat{QB}$

- a)  $40^\circ$   
b)  $52^\circ$   
c)  $60^\circ$   
d)  $75^\circ$   
e)  $80^\circ$



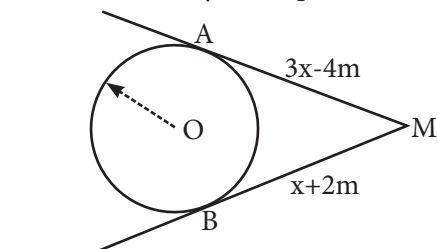
4. Calcula  $m\widehat{AE}$  si  $m\widehat{AB} = 80^\circ$ .

- a)  $30^\circ$   
b)  $35^\circ$   
c)  $38^\circ$   
d)  $40^\circ$   
e)  $42^\circ$



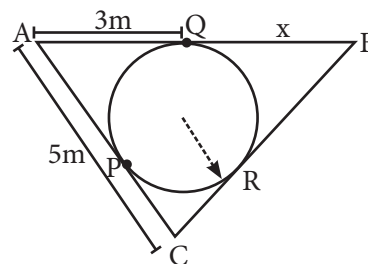
## PUCP

5. Calcula « $x$ » si A y B son puntos de tangencia.



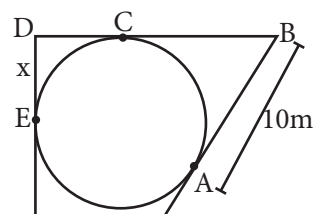
- a) 1 m  
b) 2 m  
c) 3 m  
d) 4 m  
e) 5 m

6. Calcula « $x$ » si  $BC = 10$  m. P, Q y R son puntos de tangencia.



- a) 6 m  
b) 7 m  
c) 8 m  
d) 9 m  
e) 10 m

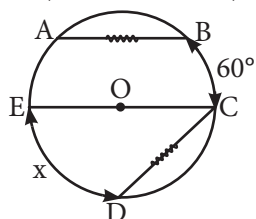
7. Si A, C y E son puntos de tangencia, calcula « $x$ », si  $BD = 12$  m.



- a) 1 m  
b) 2 m  
c) 3 m  
d) 4 m  
e) 5 m

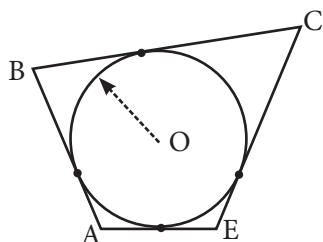
8. Calcula «x» si  $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$  ( $\overline{EC}$  es diámetro).

- a)  $100^\circ$   
b)  $110^\circ$   
c)  $115^\circ$   
d)  $120^\circ$   
e)  $130^\circ$



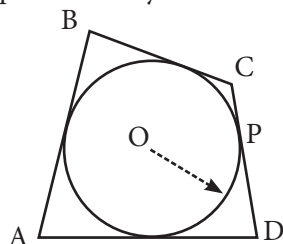
UNMSM

9. Calcula «BC» si  $AE=6$  m,  $AB=8$  m y  $EC=10$  m.



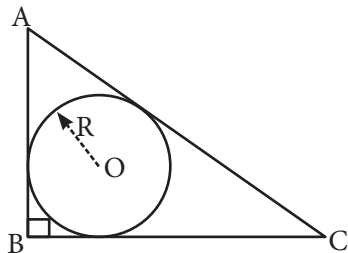
- a) 8m  
b) 10m  
c) 11m  
d) 12m  
e) 13m

10. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD si se sabe que  $AB=12u$  y  $CD=8u$ .



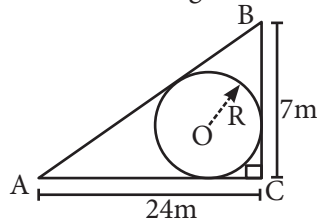
- a) 24u  
b) 30u  
c) 32u  
d) 40u  
e) 42u

11. Si  $AB=9u$  y  $AC=15u$ , calcula la longitud del inradio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



- a) 1u  
b) 1,5u  
c) 2u  
d) 2,5u  
e) 3u

12. Determina la longitud del inradio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

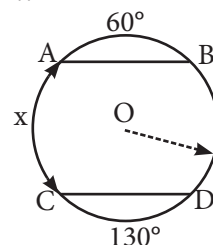


- a) 2m  
b) 2,5m  
c) 3m  
d) 4m  
e) 5m

UNI

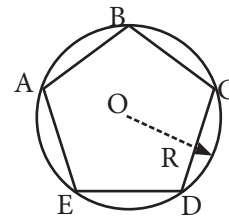
13. Calcula «x», si  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .

- a)  $81^\circ$   
b)  $82^\circ$   
c)  $84^\circ$   
d)  $85^\circ$   
e)  $88^\circ$

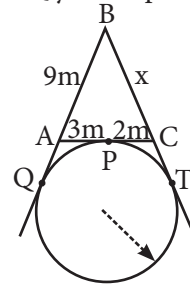


14. Calcula  $m\widehat{AB}$  si el pentágono equilátero ABCDE está inscrito en una circunferencia.

- a)  $68^\circ$   
b)  $69^\circ$   
c)  $70^\circ$   
d)  $71^\circ$   
e)  $72^\circ$



15. Calcula «x», si P, Q y T son puntos de tangencia.



- a) 8m  
b) 9m  
c) 10m  
d) 11m  
e) 12m



# CIRCUNFERENCIA: ÁNGULOS ASOCIADOS

Capítulo **14**

## ÁNGULOS ASOCIADOS

Son aquellos ángulos que se relacionan con la circunferencia por su ubicación. Además, se sabe que la medida de los ángulos y los arcos de la circunferencia cumplen con determinadas ecuaciones o fórmulas.

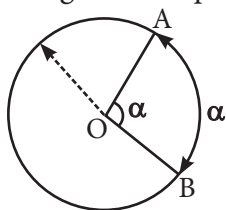
### 1. Ángulo central

Es aquel ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios cualesquiera.

$\angle AOB$  es un ángulo central donde  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$  son radios y  $O$  es el centro de la circunferencia.

$\widehat{AB}$  es un arco de la circunferencia.

Luego, se cumple para todo ángulo central:



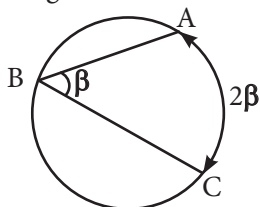
$$m\angle AOB = m\widehat{AB} = \alpha$$

### 2. Ángulo inscrito

Es aquel ángulo formado por dos cuerdas, cuyo vértice es un punto de la circunferencia (aférente)

$\angle ABC$ , inscrito en la circunferencia de centro  $O$ , donde  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  son cuerdas de la circunferencia y el punto  $B$  pertenece a la circunferencia.

Luego, para el ángulo inscrito, se cumple:



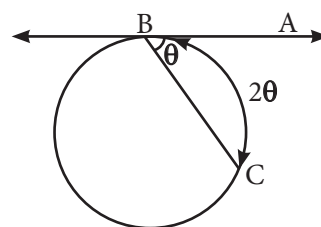
$$m\angle ABC = \frac{m\widehat{AC}}{2} \text{ o } 2m\angle ABC = m\widehat{AC}$$

### 3. Ángulo semiinscrito

Es aquel ángulo formado por una recta tangente a la circunferencia y una cuerda que pasa por el punto de tangencia. Sea la recta  $\mathcal{L}$  tangente,  $B$  es el punto de tangencia y  $\overline{BC}$  es una cuerda de la circunferencia.

El  $\angle ABC$  es un ángulo semiinscrito. Además,  $\overline{BC}$  es el que determina la cuerda en la circunferencia.

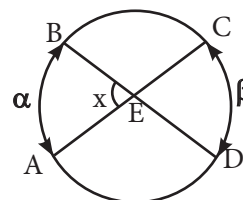
Luego, para el ángulo semiinscrito se cumple:



$$m\angle ABC = \frac{m\widehat{BC}}{2} \text{ y } 2m\angle ABC = m\widehat{BC}$$

### 4. Ángulo interior

Es aquel ángulo formado por dos cuerdas secantes que se cortan en un punto de la región interior de la circunferencia.



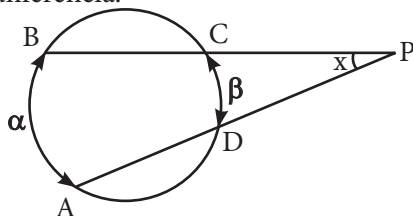
En todo ángulo interior, se cumple:

$$m\angle ABC = x; m\widehat{AB} = \alpha; m\widehat{CD} = \beta$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

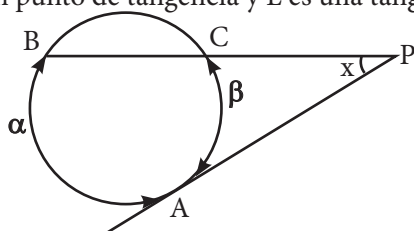
## 5. Ángulo exterior

Es aquel ángulo ubicado en la región externa de la circunferencia.



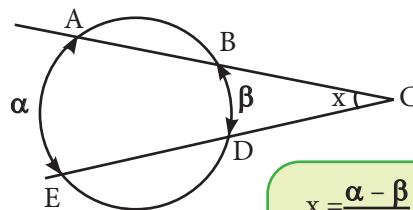
Se puede formar:

Por la intersección de una recta tangente y una recta secante a la circunferencia, donde A es un punto de tangencia y L es una tangente.



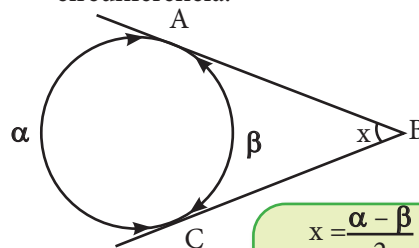
$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- Por la intersección de dos rectas secantes a la circunferencia.



$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- Por la intersección de dos rectas tangentes a la circunferencia.



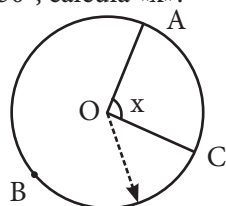
$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}; x + \beta = \frac{180^\circ}{2}$$

(A y C: puntos de tangencia)

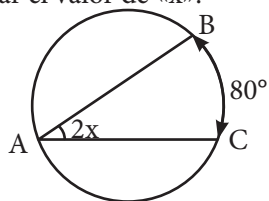
## Trabajando en clase

### Integral

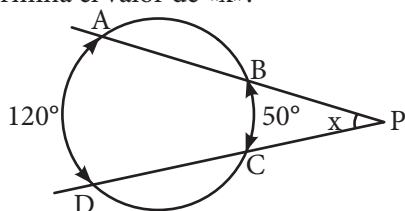
- Si  $m\widehat{ABC} = 250^\circ$ , calcula «x».



- Determinar el valor de «x».

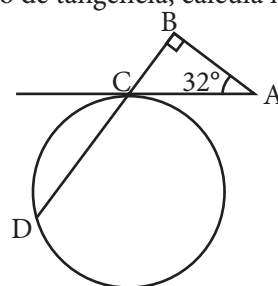


- Determina el valor de «x».



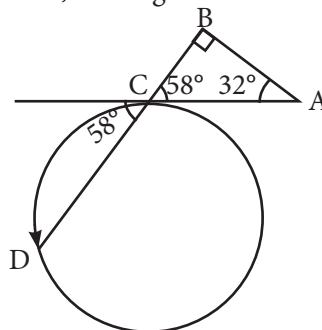
### PUCP

- Si C es punto de tangencia, calcula  $m\widehat{CD}$ .



**Resolución:**

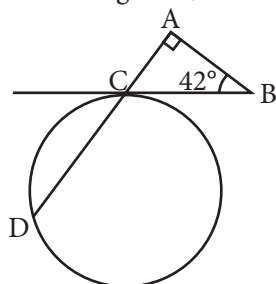
Piden  $m\widehat{CD}$ , en la figura tenemos:



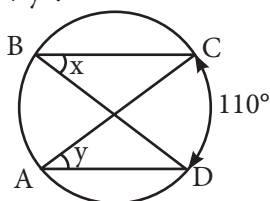
Luego  $m\widehat{CD} = 2m\angle ECD$

$$m\widehat{CD} = 2(58^\circ) \rightarrow m\widehat{CD} = 116^\circ$$

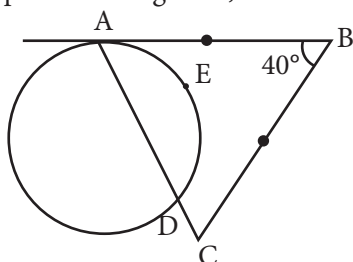
5. Si C es el punto de tangencia, calcula  $m\widehat{CD}$ .



6. Calcula « $x + y$ ».

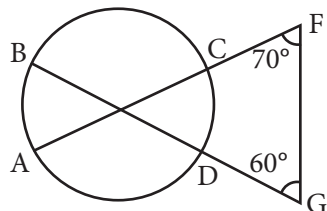


7. Si A es punto de tangencia, calcula  $m\widehat{AED}$ .



### UNMSM

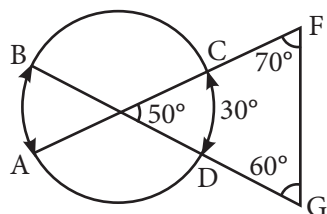
8. Calcula  $m\widehat{AB}$ ; si  $m\widehat{CD} = 30^\circ$ .



### Resolución:

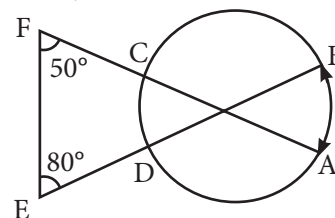
Piden:  $m\widehat{AB}$

En la figura, tenemos:

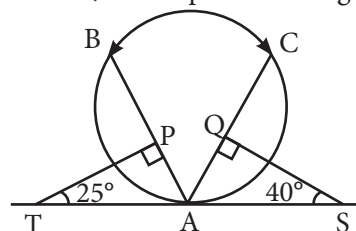


$$\begin{aligned} \text{Luego, } 50^\circ &= \frac{m\widehat{AB} + m\widehat{CD}}{2} \\ 100^\circ &= m\widehat{AB} + 30^\circ \\ m\widehat{AB} &= 70^\circ \end{aligned}$$

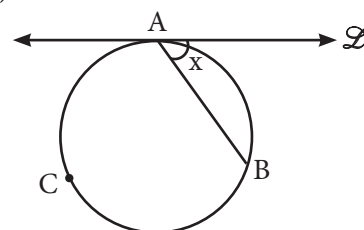
9. Calcula  $m\widehat{AB}$ , si  $m\widehat{CD} = 20^\circ$ .



10. Calcula  $m\widehat{BC}$ , si A es punto de tangencia.

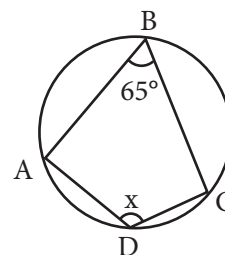


11. Calcula « $x$ » si  $m\widehat{ABC} = 280^\circ$ . (A: punto de tangencia).



### UNI

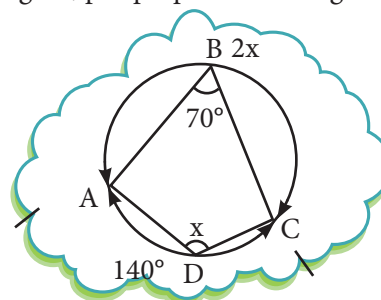
12. Determina el valor de « $x$ ».



### Resolución:

Piden: « $x$ »

En la figura, por propiedad del ángulo inscrito.



Luego, tenemos:

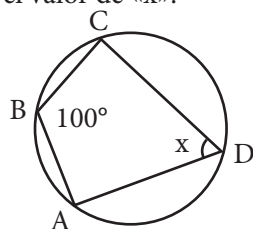
Medida angular de la circunferencia =  $360^\circ$

$$2x + 140^\circ = 360^\circ$$

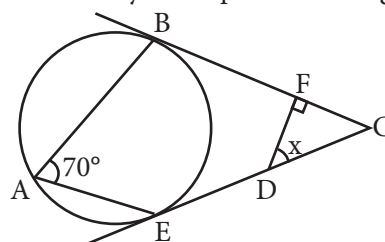
$$2x = 220^\circ$$

$$x = 110^\circ$$

13. Encuentra el valor de «x».



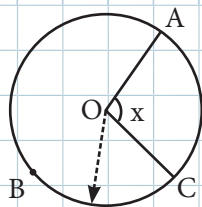
14. Calcula «x» si B y E son puntos de tangencia.



• SIGO PRACTICANDO

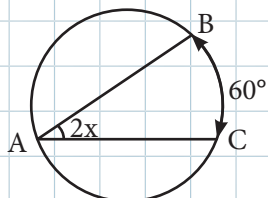
16. Si  $m\widehat{ABC}=260^\circ$ , calcula «x».

- a)  $90^\circ$
- b)  $95^\circ$
- c)  $80^\circ$
- d)  $100^\circ$
- e)  $110^\circ$



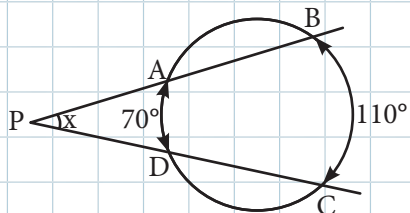
17. Determina el valor de «x».

- a)  $12^\circ$
- b)  $13^\circ$
- c) 14
- d)  $15^\circ$
- e)  $16^\circ$



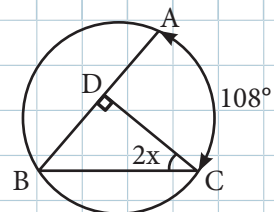
18. Calcula el valor de «x».

- a)  $12^\circ$
- b)  $14^\circ$
- c)  $16^\circ$
- d)  $18^\circ$
- e)  $20^\circ$



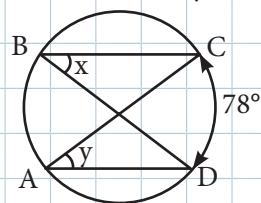
19. Calcula «x».

- a)  $15^\circ$
- b)  $16^\circ$
- c)  $17^\circ$
- d)  $18^\circ$
- e)  $19^\circ$

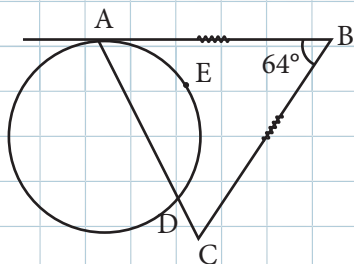


20. Determina el valor de «x + y».

- a)  $74^\circ$
- b)  $76^\circ$
- c)  $78^\circ$
- d)  $80^\circ$
- e)  $82^\circ$

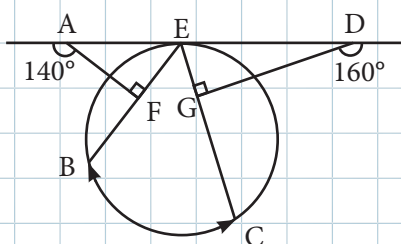


21. Si A es punto de tangencia, calcula  $m\widehat{AED}$ .



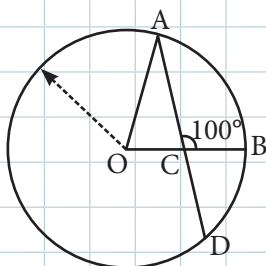
- a)  $112^\circ$       c)  $114^\circ$       e)  $116^\circ$   
b)  $113^\circ$       d)  $115^\circ$

22. Calcula  $m\widehat{BC}$  si E es punto de tangencia.



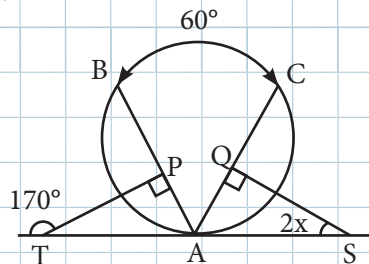
- a)  $114^\circ$       c)  $118^\circ$       e)  $124^\circ$   
b)  $116^\circ$       d)  $120^\circ$

23. Calcula  $m\widehat{AB}$ , si  $AC = \text{radio}$ .



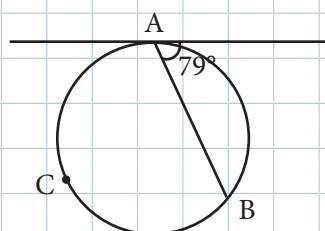
- a)  $74^\circ$       c)  $78^\circ$       e)  $82^\circ$   
b)  $76^\circ$       d)  $80^\circ$

24. Determina el valor de «x» si A es punto de tangencia.



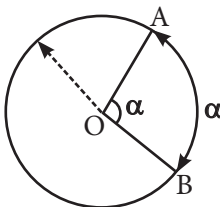
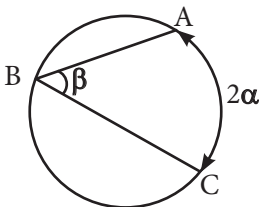
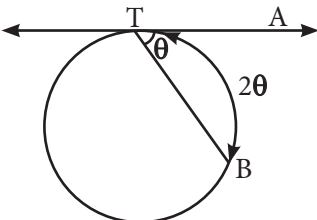
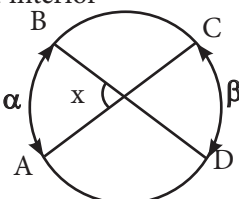
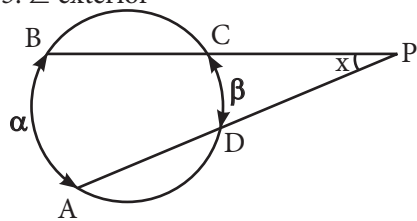
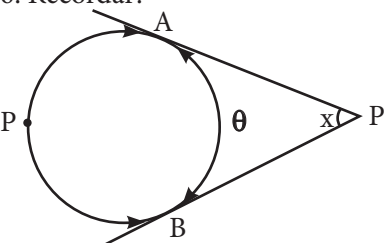
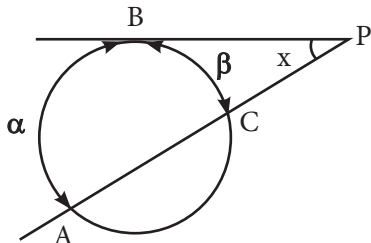
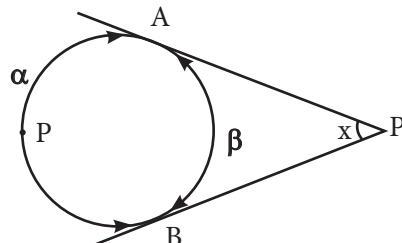
- a)  $7^\circ$       c)  $9^\circ$       e)  $11^\circ$   
b)  $8^\circ$       d)  $10^\circ$

25. Encuentra el valor de  $\frac{m\widehat{ACB}}{2}$ .



- a)  $97^\circ$       c)  $99^\circ$       e)  $101^\circ$   
b)  $98^\circ$       d)  $100^\circ$

# • Esquema formulario

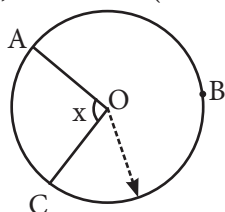
|                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <math>\angle</math> central</p>  <p><math>m\angle AOB = m \widehat{AB} = \alpha</math></p>                                                                                          | <p>2. <math>\angle</math> inscrito</p>  <p><math>m\angle ABC = \frac{m \widehat{AC}}{2}</math></p>                                                                                              | <p>3. <math>\angle</math> semiinscrito</p>  <p><math>m\angle ATB = \frac{m \widehat{TB}}{2}</math></p>                            |
| <p>4. <math>\angle</math> interior</p>  <p><math>x = \frac{m \widehat{AB} + m \widehat{CD}}{2}</math></p> <p><math>x = \frac{\alpha + \beta}{2}</math></p>                               | <p>5. <math>\angle</math> exterior</p>  <p><math>x = \frac{m \widehat{AB} - m \widehat{CD}}{2}</math></p> <p><math>x = \frac{\alpha - \beta}{2}</math></p>                                     | <p>6. Recordar:</p>  <p><math>x + m \widehat{AB} =</math></p> <p><math>x + \theta =</math></p> <p>A y B: puntos de tangencia</p> |
| <p>7. <math>\angle</math> exterior</p>  <p><math>x = \frac{m \widehat{AB} - m \widehat{BC}}{2}</math></p> <p><math>x = \frac{\alpha - \beta}{2}</math></p> <p>B: punto de tangencia</p> | <p>8. <math>\angle</math> exterior</p>  <p><math>x = \frac{\alpha - \beta}{2}</math></p> <p><math>x = \frac{m \widehat{APB} - m \widehat{AB}}{2}</math></p> <p>A y B: punto de tangencia</p> |                                                                                                                                                                                                                      |

# Tarea

## Integral

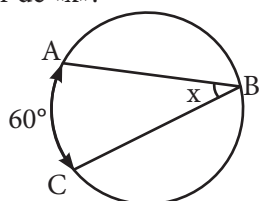
1. Si  $m\widehat{ABC} = 280^\circ$ , calcula «x». (O es centro)

- a)  $62^\circ$   
b)  $68^\circ$   
c)  $70^\circ$   
d)  $80^\circ$   
e)  $82^\circ$



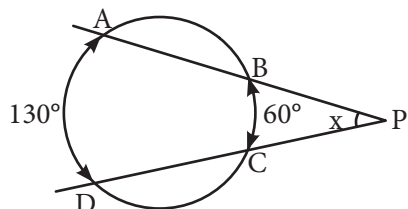
2. Determina el valor de «x».

- a)  $27^\circ$   
b)  $28^\circ$   
c)  $29^\circ$   
d)  $30^\circ$   
e)  $32^\circ$



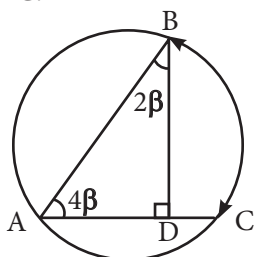
3. Encuentra el valor de «x».

- a)  $30^\circ$   
b)  $35^\circ$   
c)  $39^\circ$   
d)  $42^\circ$   
e)  $44^\circ$



4. Calcula  $m\widehat{BC}$ .

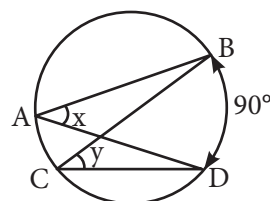
- a)  $100^\circ$   
b)  $110^\circ$   
c)  $120^\circ$   
d)  $140^\circ$   
e)  $160^\circ$



## PUCP

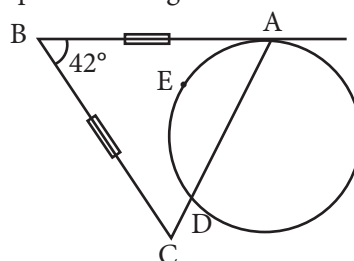
5. Determina el valor de «x+y».

- a)  $40^\circ$   
b)  $60^\circ$   
c)  $70^\circ$   
d)  $80^\circ$   
e)  $90^\circ$



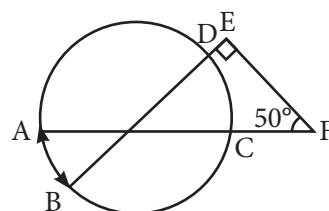
6. Si A es punto de tangencia. Calcula  $m\widehat{AED}$ .

- a)  $89^\circ$   
b)  $120^\circ$   
c)  $136^\circ$   
d)  $138^\circ$   
e)  $140^\circ$



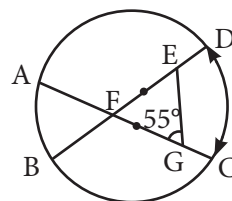
7. Si  $m\widehat{CD} = 45^\circ$ , calcula  $m\widehat{AB}$ .

- a)  $20^\circ$   
b)  $25^\circ$   
c)  $30^\circ$   
d)  $35^\circ$   
e)  $40^\circ$



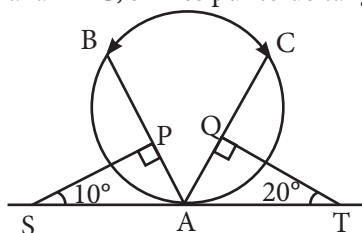
8. Calcula  $m\widehat{CD}$  si  $EF = FG$  y  $m\widehat{AB} = 60^\circ$ .

- a)  $60^\circ$   
b)  $62^\circ$   
c)  $68^\circ$   
d)  $72^\circ$   
e)  $80^\circ$

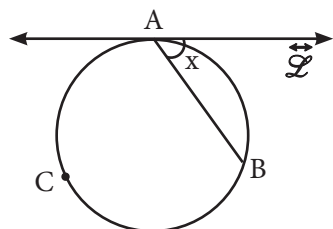


UNMSM

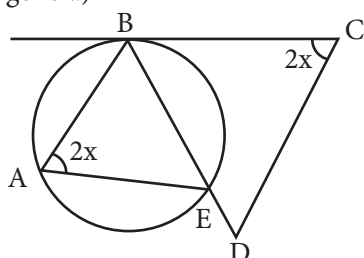
9. Calcula la  $m\widehat{BC}$ , si A es punto de tangencia.



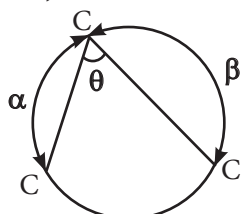
- a)  $42^\circ$       c)  $50^\circ$       e)  $70^\circ$   
b)  $48^\circ$       d)  $60^\circ$
10. Calcula «x» si  $m\widehat{ACB} = 240^\circ$ . (A: punto de tangencia)



- a)  $50^\circ$       c)  $60^\circ$       e)  $70^\circ$   
b)  $58^\circ$       d)  $64^\circ$
11. De la figura, calcula «x». Si  $BC = CD$ . (B: punto de tangencia)



- a)  $20^\circ$       c)  $30^\circ$       e)  $40^\circ$   
b)  $25^\circ$       d)  $35^\circ$
12. Si  $\alpha + \beta = 200^\circ$ , calcula « $\theta$ ».

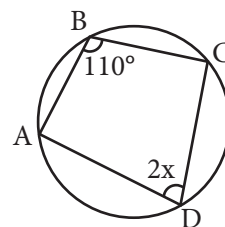


- a)  $80^\circ$       c)  $90^\circ$       e)  $60^\circ$   
b)  $100^\circ$       d)  $70^\circ$

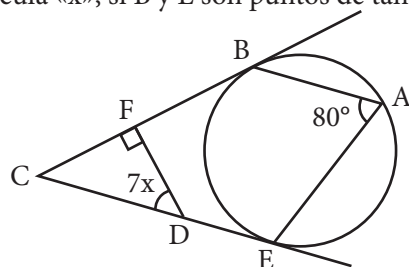
UNI

13. Determinar el valor de «x».

- a)  $20^\circ$   
b)  $25^\circ$   
c)  $30^\circ$   
d)  $35^\circ$   
e)  $40^\circ$

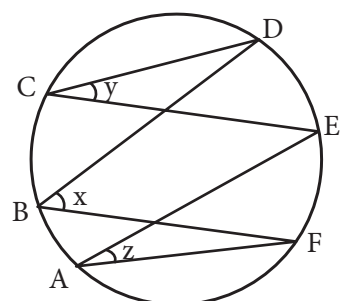


14. Calcula «x», si B y E son puntos de tangencia.



- a)  $8^\circ$       c)  $12^\circ$       e)  $15^\circ$   
b)  $10^\circ$       d)  $13^\circ$

15. Calcula «x», si  $y + z + x = 80^\circ$



- a)  $25^\circ$       c)  $35^\circ$       e)  $45^\circ$   
b)  $30^\circ$       d)  $40^\circ$



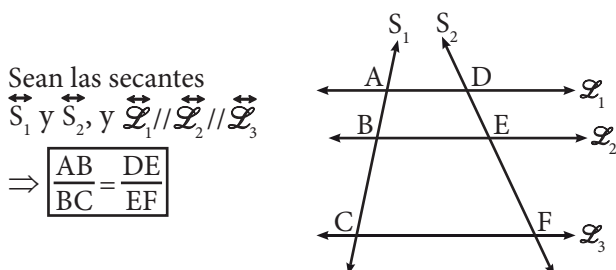


# PROPORCIONALIDAD

## Capítulo 15

### TEOREMA DE TALES

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes sobre cualquier otra secante.



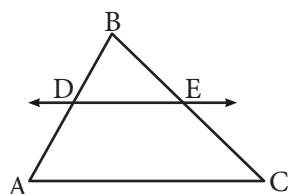
Tales de Mileto (624-547 a.C.) es considerado el primer matemático de la historia en un sentido moderno.

### COROLARIO DE TALES

Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca a los otros dos, entonces determina en ellos segmentos proporcionales.

En la figura,  $\vec{DE} // \vec{AC}$

$\Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$

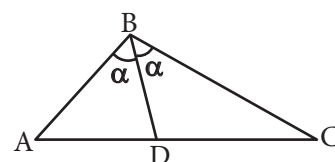


### Teorema de la bisectriz interior (T. B. I.)

La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

$\overline{BD}$  bisectriz del ángulo interior ABC del  $\triangle ABC$ .

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$



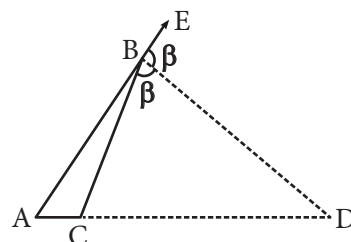
Un teorema es una proposición matemática que debe ser demostrada.

### Teorema de la bisectriz exterior (T. B. E.)

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo divide al lado opuesto (prolongado) en segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo.

$\overline{BD}$ : bisectriz del ángulo exterior EBC del  $\triangle ABC$

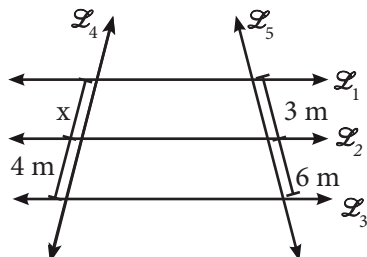
$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$



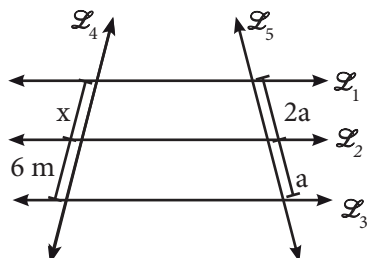
## Trabajando en clase

### Integral

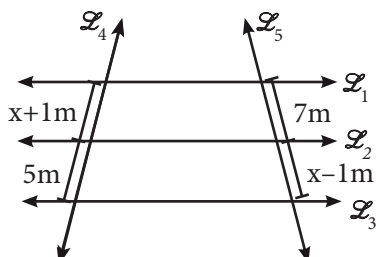
1. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».



2. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».

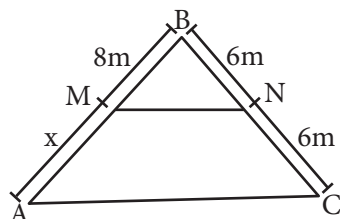


3. Calcula «x», si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ .



### PUCP

4. Calcula «x» si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ .



Resolución:

Por el corolario de Tales.

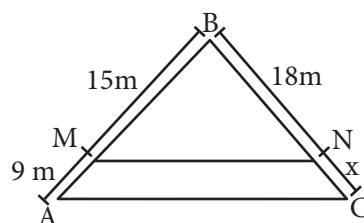
$$\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{NC}$$

Reemplazando:  $\frac{8}{x} = \frac{6}{3}$

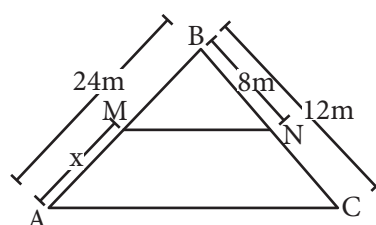
Luego,  $24 = 6x$

$\therefore x = 4 \text{ m}$

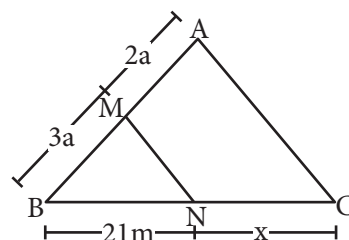
5. Calcula «x» si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ .



6. Calcula «x» si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ .

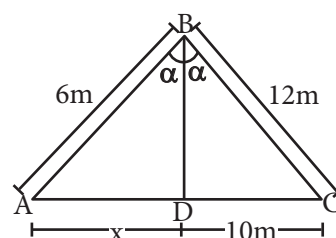


7. Calcula «x» si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ .



### UNMSM

8. Calcula «x».



Resolución:

Por el teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

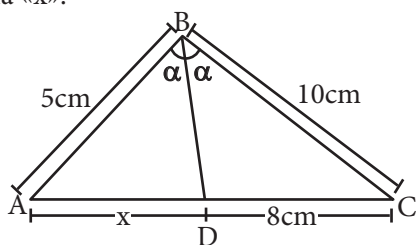
Reemplazando:

$$\frac{6}{12} = \frac{x}{10}$$

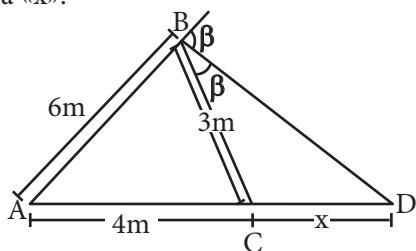
Luego,  $60 = 12x$

$\therefore x = 5 \text{ m}$

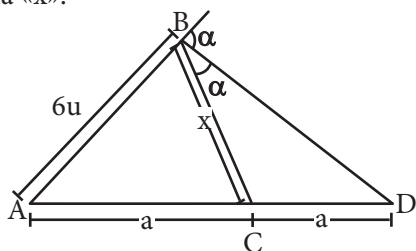
9. Calcula «x».



10. Calcula «x».

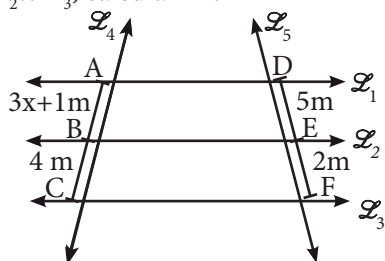


11. Calcula «x».



UNI

12. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».



### Resolución

Por el teorema de Tales:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Reemplazando:

$$\frac{3x+1}{4} = \frac{5}{2}$$

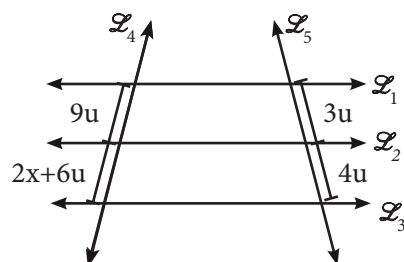
Luego, tenemos:

$$6x+2=20$$

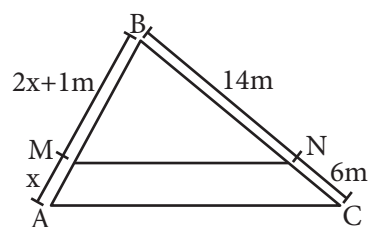
Por tanto:

$$x=3\text{ m}$$

13. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».

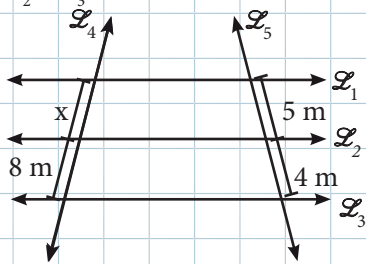


14. Si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ , calcula «x».



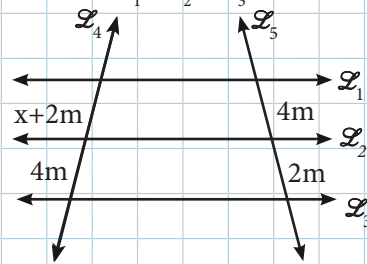
# Sigo practicando

16. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».



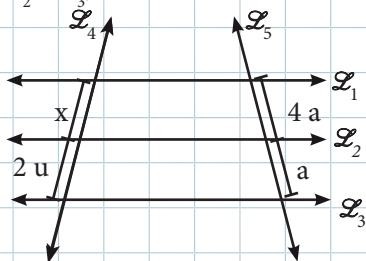
- a) 4 m
- b) 6 m
- c) 8 m
- d) 10 m
- e) 12 m

18. Calcula «x» si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ .



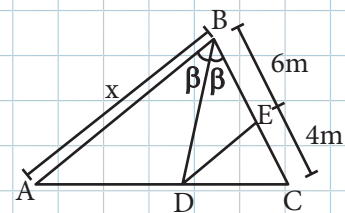
- a) 5 m
- b) 6 m
- c) 7 m
- d) 8 m
- e) 9 m

17. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».



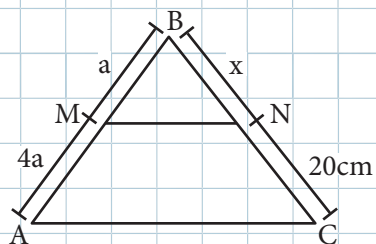
- a) 2 u
- b) 4 u
- c) 6 u
- d) 8 u
- e) 10 u

19. Si  $\overline{AB} // \overline{DE}$ , calcula «x».



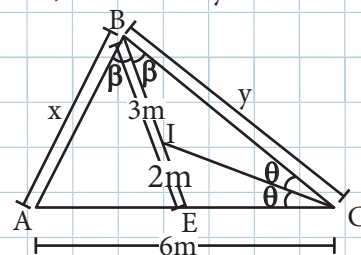
- a) 10 m
- b) 11 m
- c) 13 m
- d) 14 m
- e) 15 m

20. Calcula «x» si  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ .



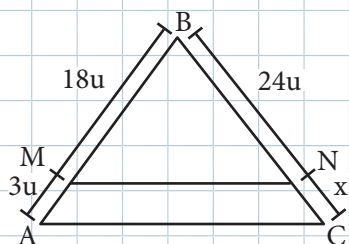
- a) 2 cm                      d) 6 cm  
b) 3 cm                      e) 8 cm  
c) 5 cm

22. Si  $EC = 4$  m, calcula «x + y».



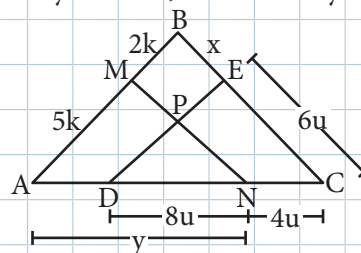
- a) 3 m                      d) 9 m  
b) 5 m                      e) 11 m  
c) 7 m

21. Calcula «x» si  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ .



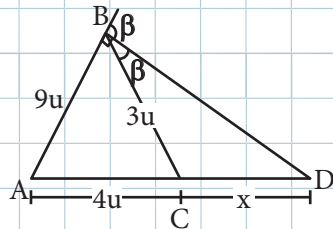
- a) 3 u                      d) 6 u  
b) 4 u                      e) 7 u  
c) 5 u

23. Si  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$  y  $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ , calcula «x + y».



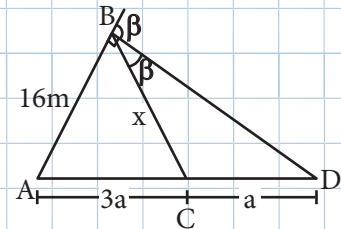
- a) 5 u                      d) 8 u  
b) 6 u                      e) 11 u  
c) 7 u

24. Calcula «x».



- a) 2 u
- b) 4 u
- c) 6 u
- d) 8 u
- e) 10 u

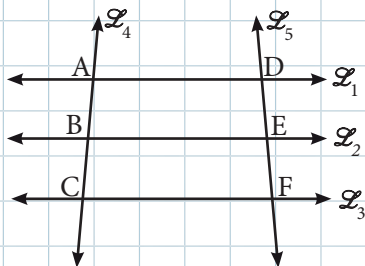
25. Calcula «x».



- a) 2 m
- b) 3 m
- c) 4 m
- d) 5 m
- e) 7 m

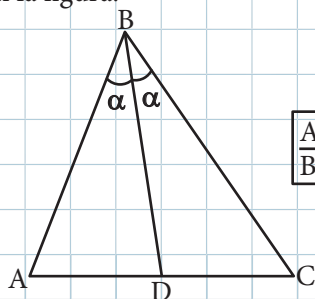
## Esquema formulario

Si:  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$



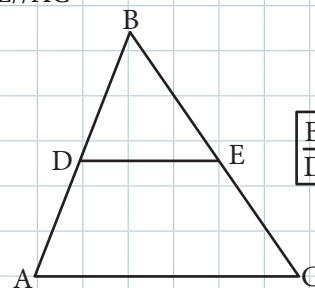
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Según la figura:



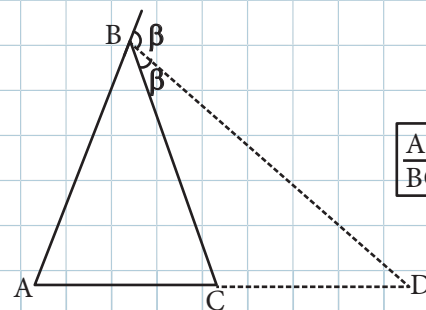
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

Si:  $\overline{DE} // \overline{AC}$



$$\frac{BD}{DA} = \frac{AD}{CD}$$

Según al figura:

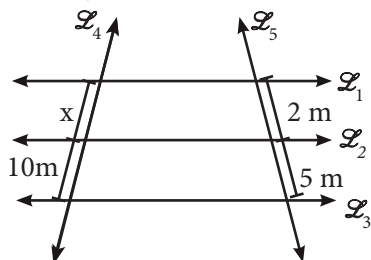


$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

# Tarea

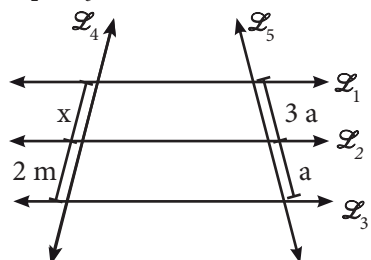
## Integral

1. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».



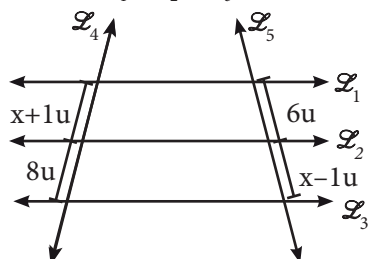
- a) 1 m                      c) 3 m                      e) 6 m  
b) 2 m                      d) 4 m

2. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».



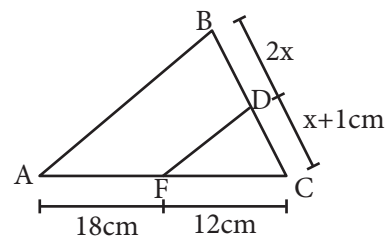
- a) 2 m                      c) 4 m                      e) 8 m  
b) 3 m                      d) 6 m

3. Calcula «x» si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ .



- a) 2 u                      c) 5 u                      e) 9 u  
b) 4 u                      d) 7 u

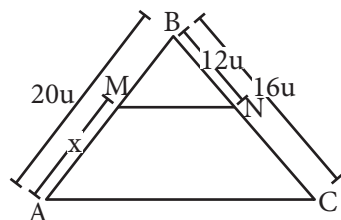
4. Calcula «x».



- a) 1 cm                      c) 3 cm                      e) 5 m  
b) 2 cm                      d) 4 m

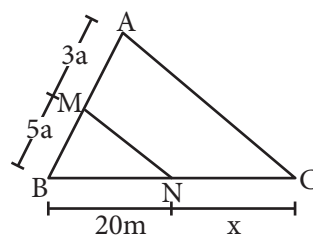
## PUCP

5. Calcula «x» si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ .



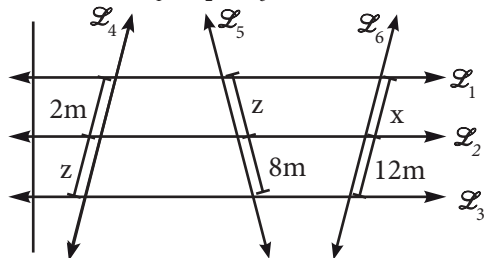
- a) 2 u                      c) 5 u                      e) 7 u  
b) 3 u                      d) 6 u

6. Calcula «x» si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ .



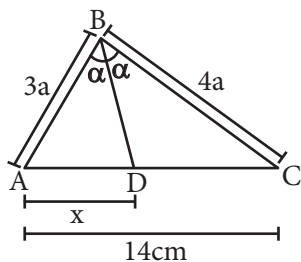
- a) 9 m                      d) 13 m  
b) 10 m                      e) 15 m  
c) 12 m

7. Calcula «x» si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ .



- a) 3 m      c) 6 m      e) 8 m  
b) 5 m      d) 7 m

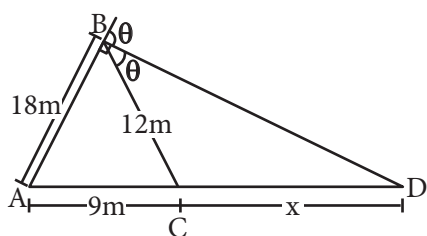
8. Calcula «x».



- a) 1 cm      d) 5 cm  
b) 3 cm      e) 6 cm  
c) 4 cm

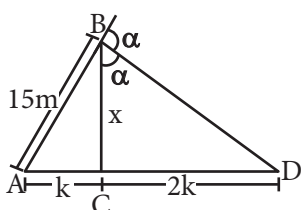
UNMSM

9. Calcula «x».



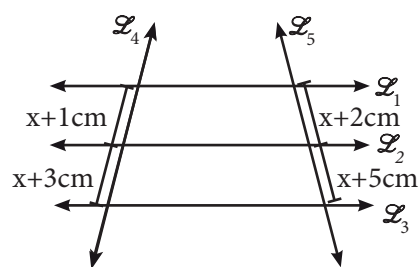
- a) 9 m      d) 15 m  
b) 12 m      e) 18 m  
c) 14 m

10. Calcula «x».



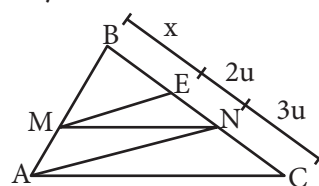
- a) 5 m      d) 9 m  
b) 6 m      e) 10 m  
c) 7 m

11. Calcula «x».



- a) 1 cm      d) 4 cm  
b) 2 cm      e) 5 m  
c) 3 cm

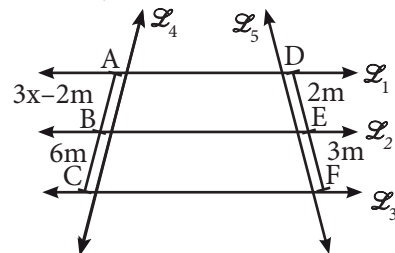
12. Si  $\overline{MN} // \overline{AC}$  y  $\overline{ME} // \overline{AN}$ , calcula «x».



- a) 12 u      d) 5 u  
b) 3 u      e) 6 u  
c) 4 u

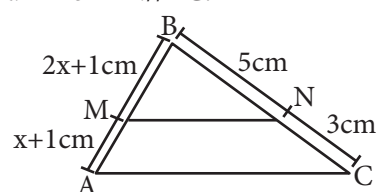
UNI

13. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3$ , calcula «x».



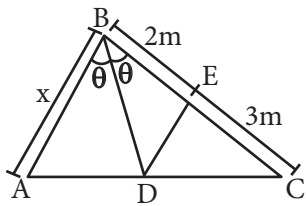
- a) 2 m      d) 5 m  
b) 3 m      e) 6 m  
c) 4 m

14. Calcula «x» si  $\overline{MN} // \overline{AC}$ .



- a) 1 cm      d) 2,5 cm  
b) 1,5 cm      e) 3 cm  
c) 2 cm

15. Calcula «x» si  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ .



- a)  $10/3 \text{ m}$       c)  $13/3 \text{ m}$       e)  $17/3 \text{ m}$   
 b)  $11/3 \text{ m}$       d)  $14/3 \text{ m}$







# SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

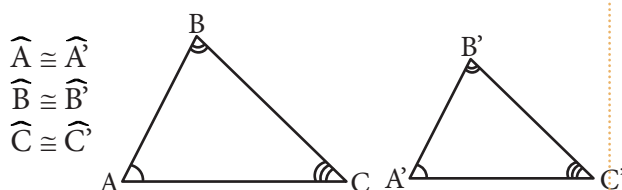
## Capítulo 16

Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados homólogos proporcionales.

### LADOS HOMÓLOGOS

Son los lados opuestos a ángulos congruentes en dos triángulos semejantes.

Así, en la figura tenemos:



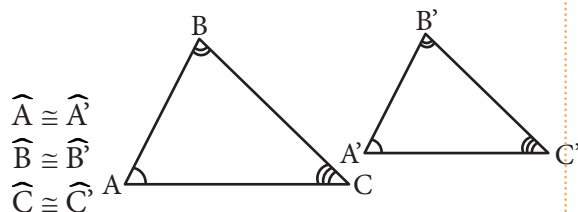
$$\text{y } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Se lee: el triángulo ABC es semejante al triángulo A'B'C'

### CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

#### Teoremas:

1. Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes.

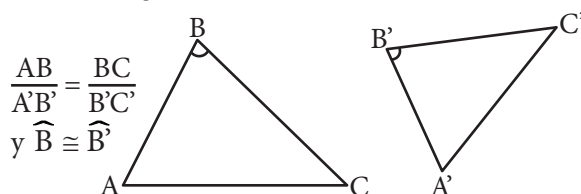


$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

**Nota:** Este teorema suele llamarse «teorema de semejanza AAA» (ángulo - ángulo - ángulo).

2. Dos triángulos son semejantes si tiene dos pares de lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruentes.

Así, en la figura:

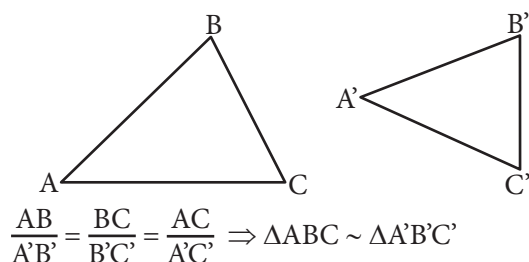


$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

**Nota:** Este teorema suele llamarse «teorema de semejanza LAL» (lado - ángulo - lado).

3. Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

Así, en la figura:



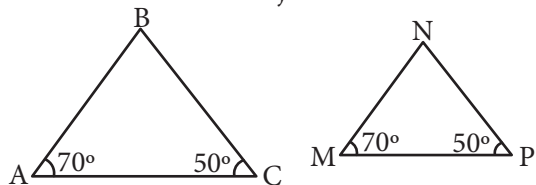
**Nota:** Este teorema suele llamarse «teorema de semejanza LLL» (lado - lado - lado).

Para utilizar los casos de semejanza de triángulos se debe tener mucho cuidado en el orden de los elementos.

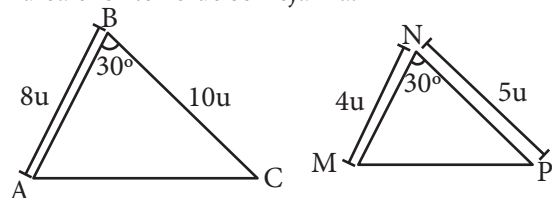
# Trabajando en clase

## Integral

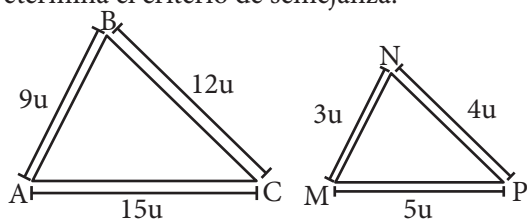
1. Señala el criterio de semejanza.



2. Indica el criterio de semejanza.

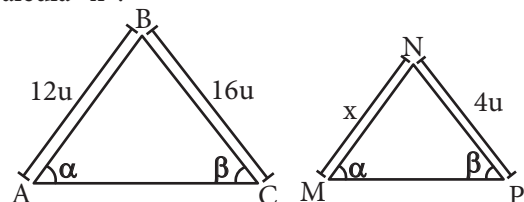


3. Determina el criterio de semejanza.



## PUCP

4. Calcula «x».



### Resolución:

Por el teorema 1:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$

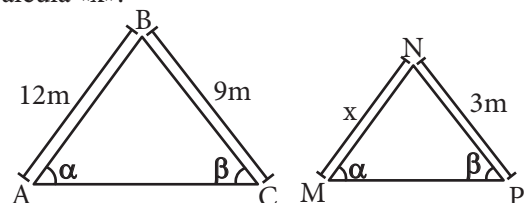
$$\text{Luego, } \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

$$\text{es decir: } \frac{12}{x} = \frac{16}{4}$$

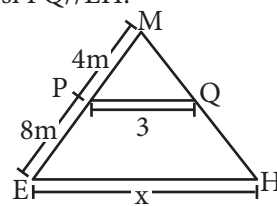
$$\Rightarrow 48 = 16 \cdot x$$

$$\text{finalmente, } x = 3 \text{ m.}$$

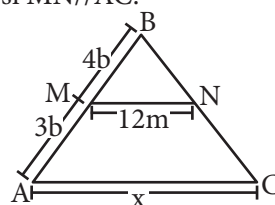
5. Calcula «x».



6. Calcula «x» si  $\overline{PQ} \parallel \overline{EH}$ .

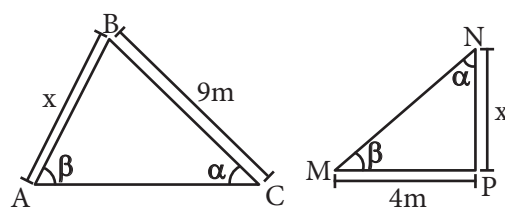


7. Calcula «x» si  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ .



## UNMSM

8. Calcula «x».



### Resolución

Por el teorema 1:

$$\triangle ABC \sim \triangle MPN$$

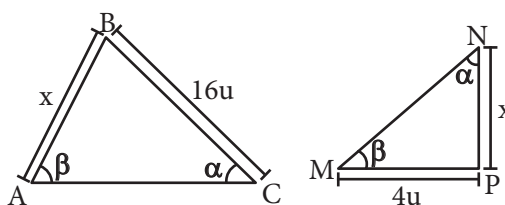
$$\text{Luego, } \frac{AB}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

$$\text{Es decir: } \frac{x}{4} = \frac{9}{x}$$

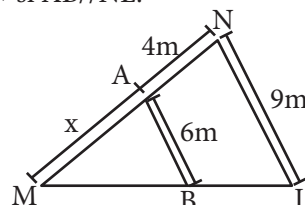
$$\Rightarrow x^2 = 36$$

$$\text{finalmente, } x = 6 \text{ m.}$$

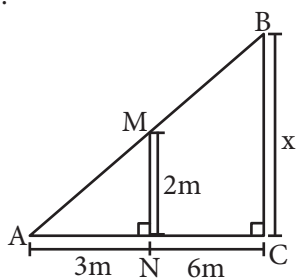
9. Calcula «x».



10. Calcula «x» si  $\overline{AB} \parallel \overline{NL}$ .

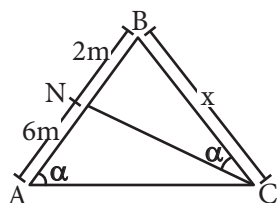


11. Calcula «x».



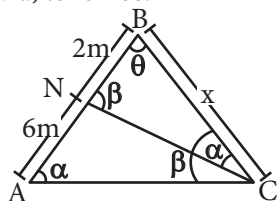
UNI

12. Calcula «x».



Resolución

Según la figura, tenemos:



Por el teorema 1:

$$\triangle NBC \sim \triangle CBA$$

Luego:

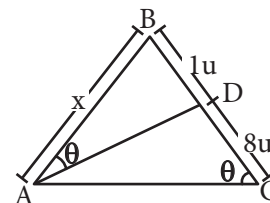
$$\frac{BC}{NB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{Reemplazando: } \frac{x}{2} = \frac{8}{x}$$

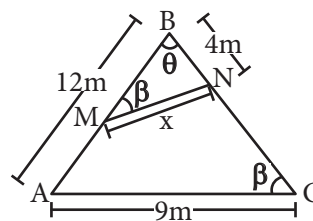
$$x^2 = 16$$

$$\therefore x = 4 \text{ m.}$$

13. Calcula «x».

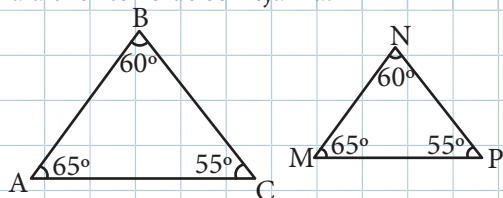


14. Calcula «x».



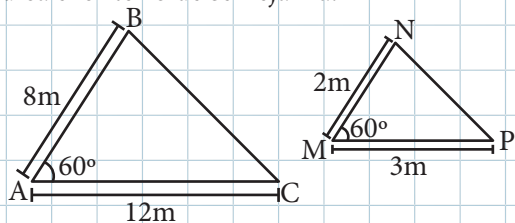
# Sigo practicando

16. Señala el criterio de semejanza.



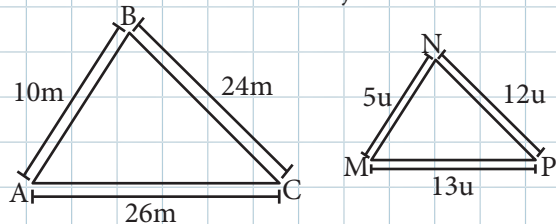
- a) AAA      c) ALA      e) LAL  
b) LLL      d) AAL

17. Indica el criterio de semejanza.



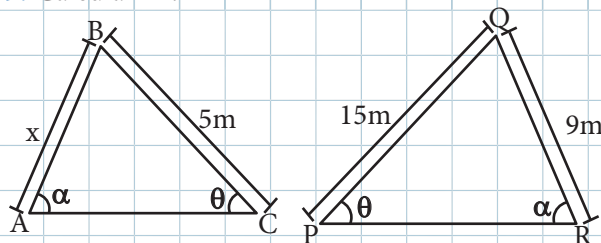
- a) LAL      c) ALA      e) AAA  
b) LLL      d) AAL

18. Determina el criterio de semejanza.



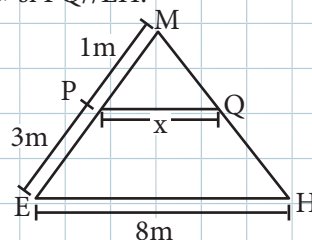
- a) LLL      c) AAL      e) LLA  
b) AAA      d) LAL

19. Calcula «x».



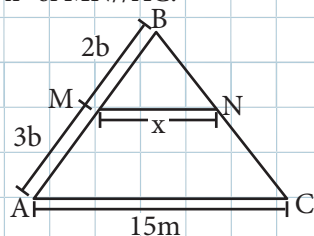
- a) 1 m      c) 4 m      e) 7 m  
b) 3 m      d) 5 m

20. Calcula «x» si  $\overline{PQ} \parallel \overline{EH}$ .



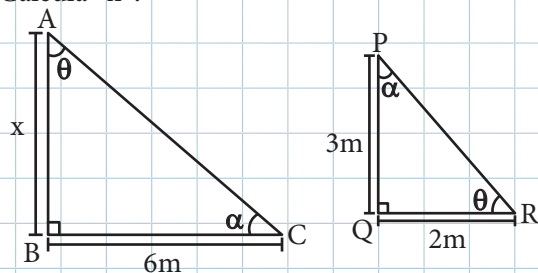
- a) 2 m      d) 3,5 m  
b) 2,5 m      e) 5 m  
c) 3 cm

21. Calcula «x» si  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ .



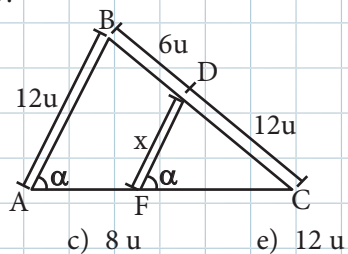
- a) 3 m  
b) 5 m  
c) 6 m  
d) 9 m  
e) 10 m

22. Calcula «x».



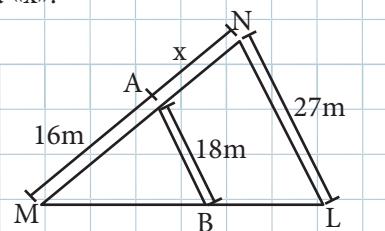
- a) 1 m  
b) 2 m  
c) 3 m  
d) 4 m  
e) 6 m

23. Calcula «x».



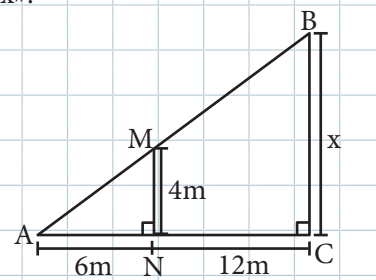
- a) 5 u  
b) 6 u  
c) 8 u  
d) 10 u  
e) 12 u

24. Calcula «x».



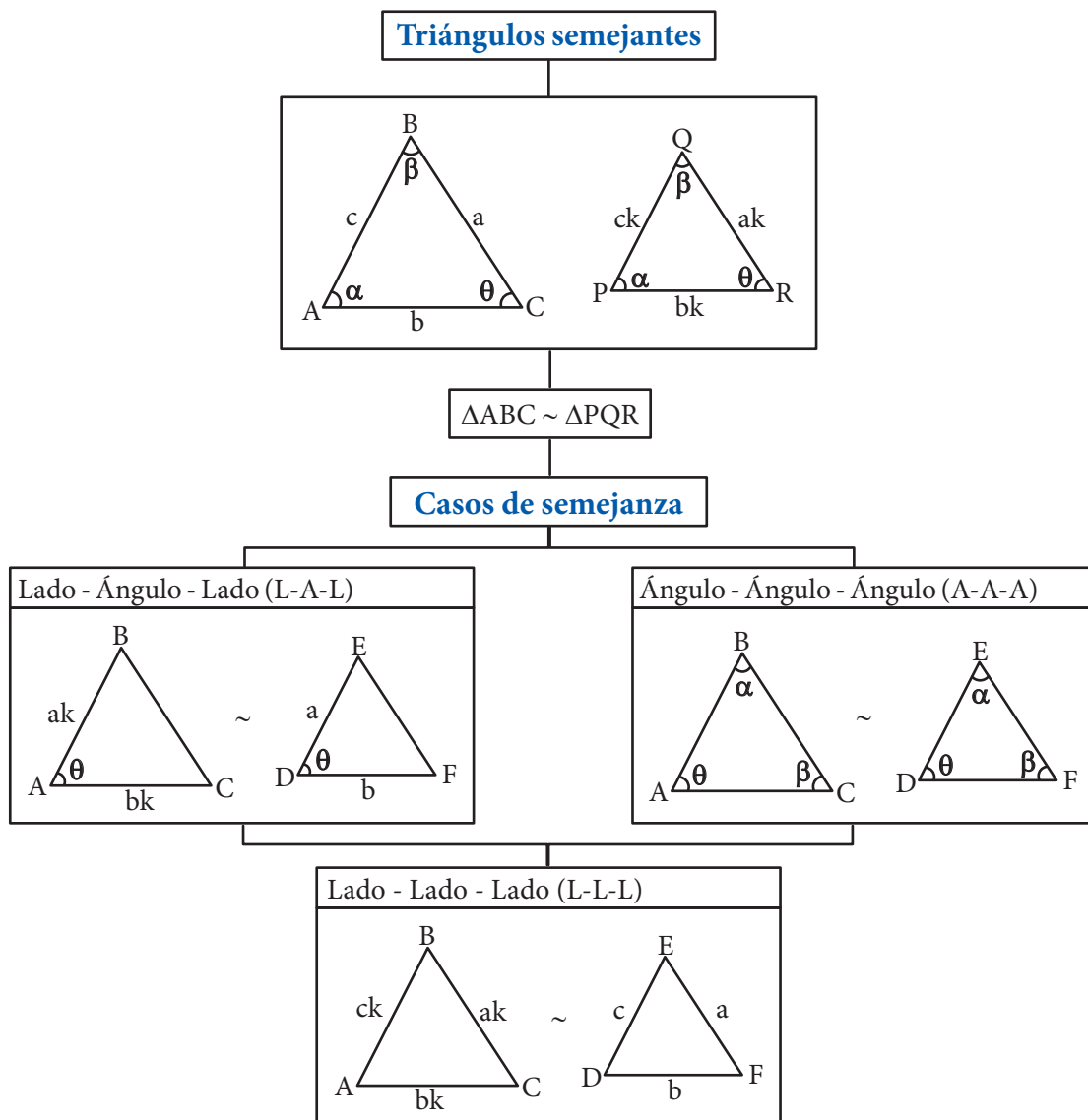
- a) 5 m  
b) 6 m  
c) 7 m  
d) 8 m  
e) 9 m

25. Calcula «x».



- a) 7 m  
b) 8 m  
c) 9 m  
d) 10 m  
e) 12 m

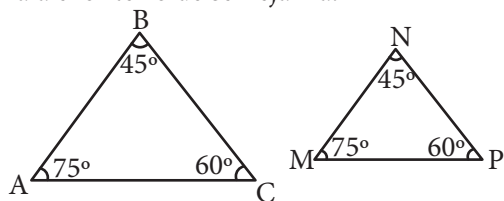
## Esquema formulario



# Tarea

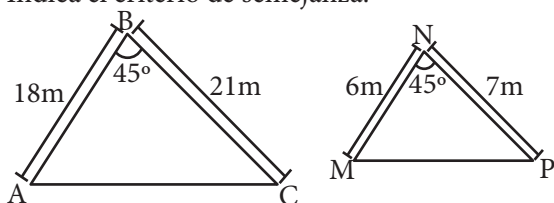
## Integral

1. Señala el criterio de semejanza.



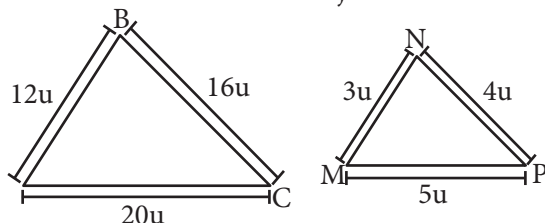
- a) LLL                      c) LAL                      e) LLA  
b) AAA                      d) AAL

2. Indica el criterio de semejanza.



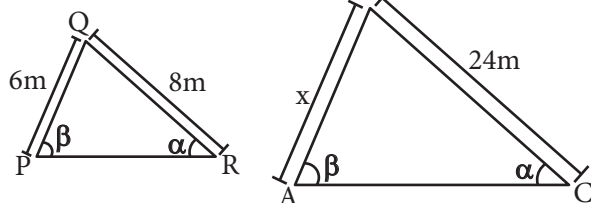
- a) LAL                      c) AAA                      e) AAL  
b) LLL                      d) LLA

3. Determina el criterio de semejanza.



- a) ALA                      c) AAA                      e) AAL  
b) LLL                      d) LAL

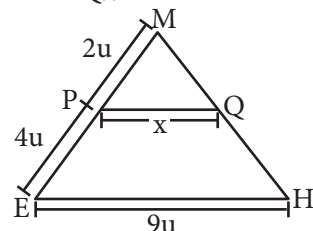
4. Calcula «x».



- a) 10 m                      d) 18 m  
b) 12 m                      e) 21 m  
c) 16 m

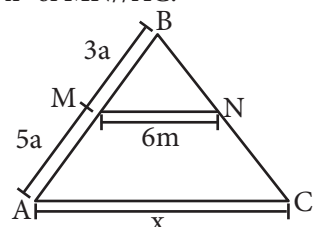
## PUCP

5. Calcula «x» si  $\overline{PQ} \parallel \overline{EH}$ .



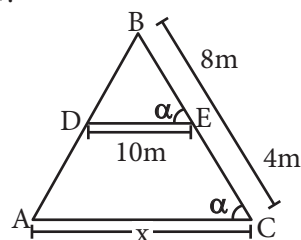
- a) 1 u                      c) 5 u                      e) 8 u  
b) 3 u                      d) 7 u

6. Calcula «x» si  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ .



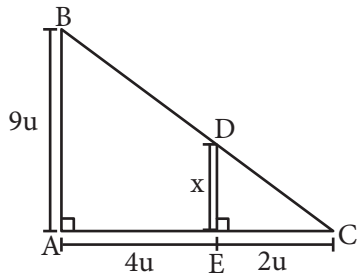
- a) 10 m                      d) 16 m  
b) 12 m                      e) 18 m  
c) 14 m

7. Calcula «x».



- a) 9 m                      d) 15 m  
b) 12 m                      e) 16 m  
c) 14 m

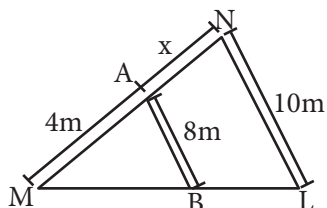
8. Calcula «x».



- a) 1 u                      d) 5 u  
b) 2 u                      e) 6 u  
c) 3 u

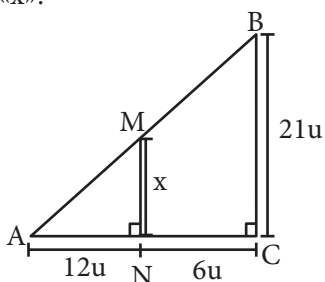
UNMSM

9. Calcula «x» si  $\overline{AB} // \overline{NL}$ .



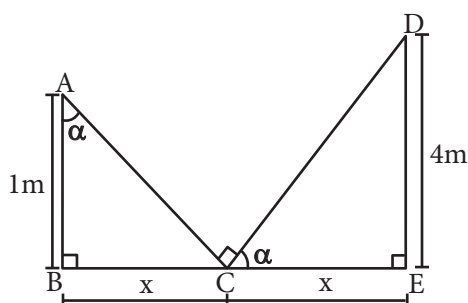
- a) 1 m                      d) 5 m  
b) 2 m                      e) 6 m  
c) 3 m

10. Calcula «x».



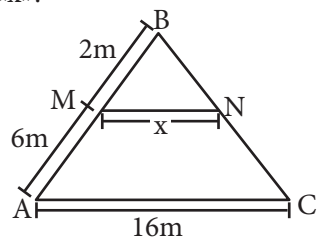
- a) 10 u                      c) 13 u                      e) 16 u  
b) 12 u                      d) 14 u

11. Calcula «x».



- a) 1 m                      c) 3 m                      e) 6 m  
b) 2 m                      d) 5 m

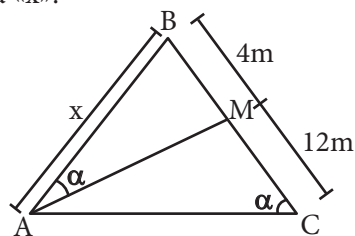
12. Calcula «x».



- a) 1/2 m                      c) 2 m                      e) 4 m  
b) 1 m                      d) 3/2

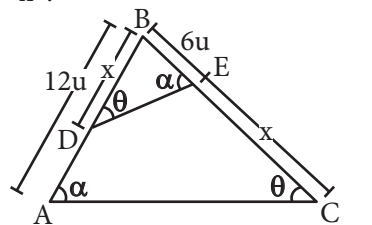
UNI

13. Calcula «x».



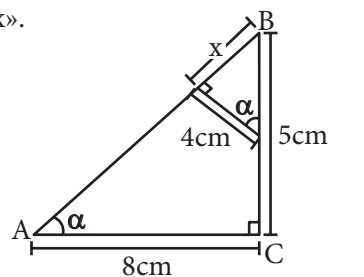
- a) 5 m                      c) 8 m                      e) 11 m  
b) 6 m                      d) 10 m

14. Calcula «x».



- a) 5 u                      c) 7 u                      e) 9 u  
b) 6 u                      d) 8 u

15. Calcula «x».



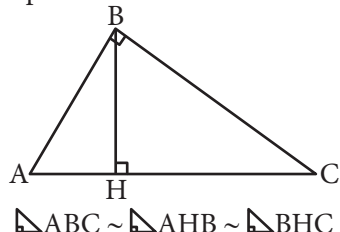
- a) 2 cm                      c) 5/2 cm                      e) 8 cm  
b) 3/2 cm                      d) 7/2 cm



# RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Capítulo **17**

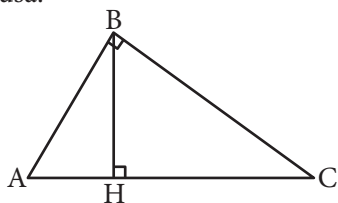
En todo triángulo rectángulo, al trazar la altura relativa a la hipotenusa se forman dos triángulos rectángulos adicionales semejantes entre sí y semejantes al primero.



De estas relaciones de semejanza se derivan proporciones entre los lados, que dan como resultado fórmulas que establecen las relaciones métricas en el triángulo rectángulo.

## A. Teorema 1

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de la longitud de su proyección por la longitud de la hipotenusa.



En el  $\triangle ABC$ , donde  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  son catetos. Al segmento  $\overline{AH}$  se le conoce como proyección de  $\overline{AB}$  sobre  $\overline{AC}$ ; de la misma forma, al segmento  $\overline{HC}$  se le conoce como proyección de  $\overline{BC}$  sobre la hipotenusa  $\overline{AC}$ .

Luego, de la misma forma:

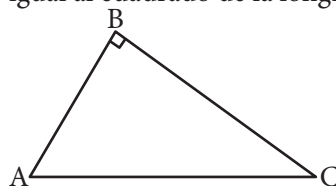
$$\begin{aligned} AB^2 &= AH \times AC \\ BC^2 &= HC \times AC \end{aligned}$$

## Recuerda

Las relaciones métricas en un triángulo se demuestran a partir de la semejanza de triángulos.

## B. Teorema 2 (teorema de Pitágoras)

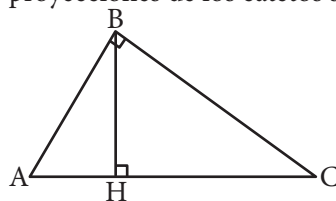
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

## C. Teorema 3

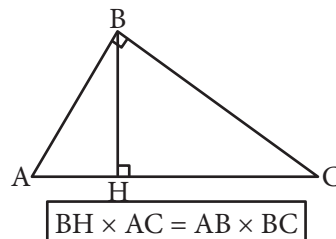
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



$$BH^2 = AH \times HC$$

## D. Teorema 4

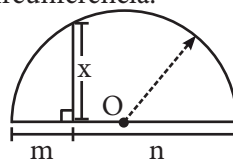
En todo triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a ella es igual al producto de las longitudes de los catetos.



$$BH \times AC = AB \times BC$$

## Propiedad

En la semicircunferencia:

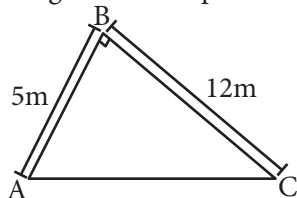


se cumple lo siguiente:  $x^2 = m \cdot n$

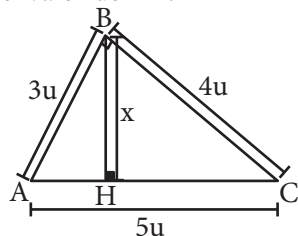
## Trabajando en clase

### Integral

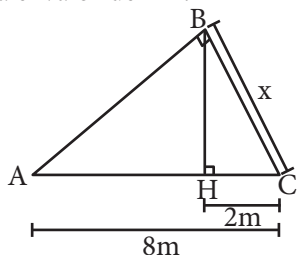
1. Calcula la longitud de la hipotenusa.



2. Determina el valor de «x».

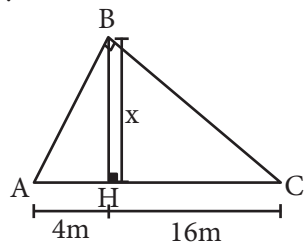


3. Encuentra el valor de «x».



### PUCP

4. Calcula «x».



#### Resolución:

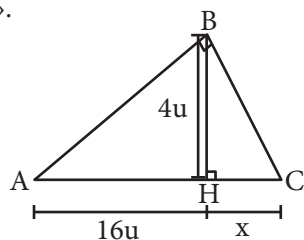
Por propiedad:  $BH^2 = AH \cdot HC$

Reemplazando:  $x^2 = 4 \cdot 16$

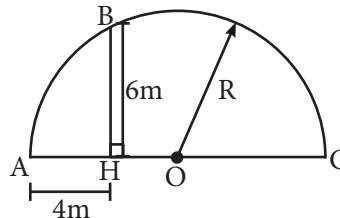
$$x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ m}$$

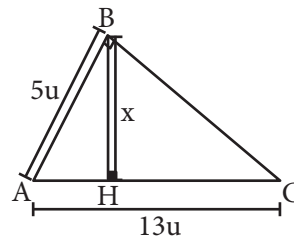
5. Calcula «x».



6. Calcula la longitud del radio de la semicircunferencia. El centro es O.

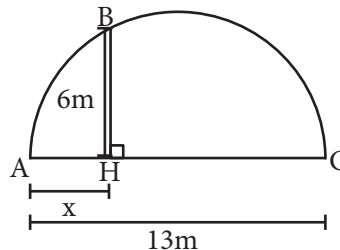


7. Determina el valor de «x».



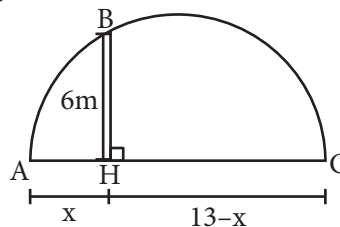
### UNMSM

8. Encuentra el valor de «x».



#### Resolución:

Tenemos:



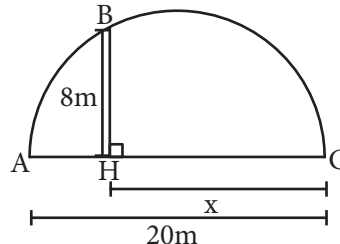
Por propiedad:  $BH^2 = AH \cdot HC$

Reemplazando:  $6^2 = x(13 - x)$

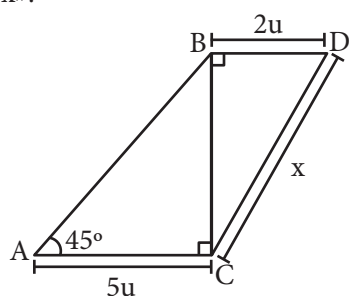
$$4(13 - 4) = x(13 - x)$$

$$\therefore x = 4 \text{ m.}$$

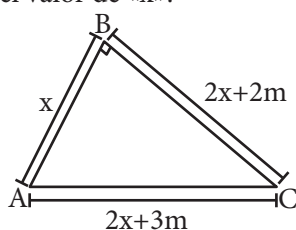
9. Encuentra el valor de «x».



10. Calcula «x».

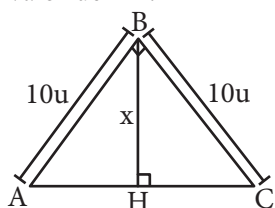


11. Determina el valor de «x».



UNI

12. Encuentra el valor de «x».



Resolución

Por Pitágoras:

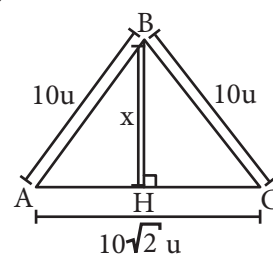
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Reemplazando:

$$AC^2 = 10^2 + 10^2$$

$$\therefore AC = 10\sqrt{2} \text{ u}$$

En la figura, tenemos:



Por propiedad:

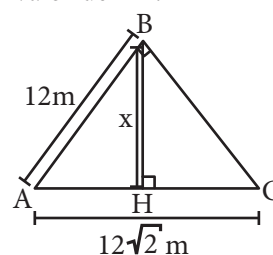
$$AC \cdot BH = AB \cdot BC$$

Reemplazando

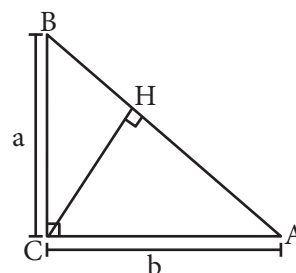
$$10\sqrt{2} \cdot x = 10 \cdot 10$$

$$\therefore x = 5\sqrt{2} \text{ u}$$

13. Encuentra el valor de «x».

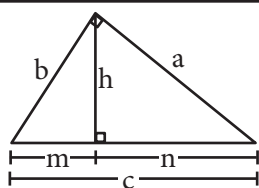


14. Calcula cuánto mide la altura CH.



## Esquema formulario

### En el triángulo rectángulo



$$a^2 + b^2 = c^2$$

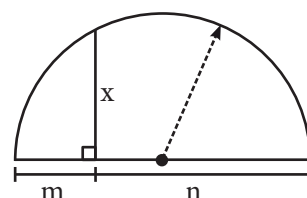
$$ab = ch$$

$$h^2 = m \cdot n$$

$$a^2 = n \cdot c$$

$$b^2 = m \cdot c$$

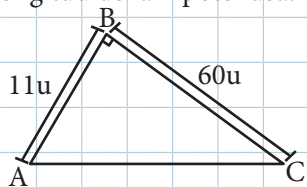
### En el semicírculo



$$x^2 = m \cdot n$$

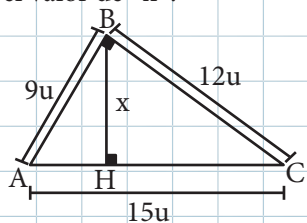
# Sigo practicando

16. Calcula la longitud de la hipotenusa.



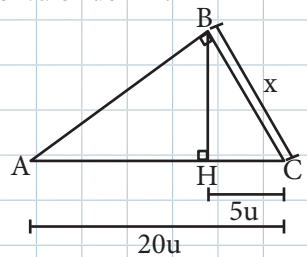
- a) 61 m      c) 63 m      e) 66 m  
b) 62 m      d) 65 m

17. Determina el valor de «x».



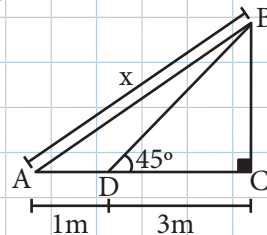
- a)  $106/17$  u      c)  $109/11$  u      e)  $106/11$  u  
b)  $108/15$  u      d)  $110/19$  u

18. Encuentra el valor de «x».



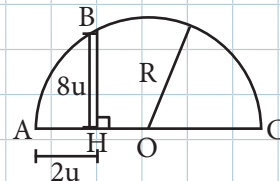
- a) 8 u      c) 10 u      e) 13 u  
b) 9 u      d) 12 u

19. Calcula «x».



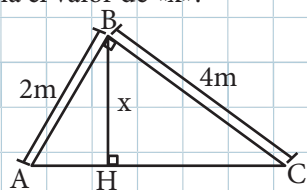
- a) 2 m      c) 4 m      e) 6 m  
b) 3 m      d) 5 m

20. Calcula la longitud del radio de la semicircunferencia si O es centro.



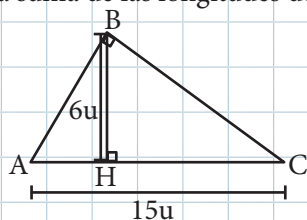
- a) 12 u      d) 17 u  
b) 13 u      e) 20 u  
c) 16 u

21. Determina el valor de «x».



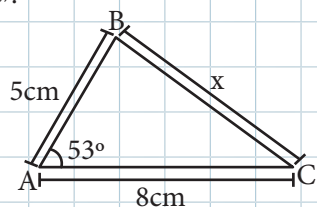
- a)  $\frac{4}{5}\sqrt{5}$  m      d)  $\frac{9}{5}\sqrt{5}$  m  
 b)  $\frac{3}{5}\sqrt{5}$  m      e)  $\frac{12}{5}\sqrt{5}$  m  
 c)  $\frac{7}{5}\sqrt{5}$  m

22. Calcula la suma de las longitudes de los catetos.



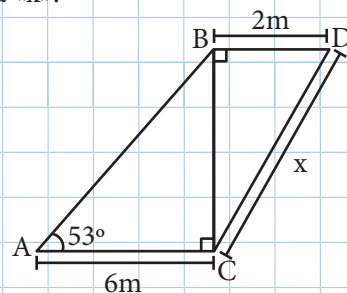
- a)  $3\sqrt{5}$       d)  $8\sqrt{5}$   
 b)  $6\sqrt{5}$       e)  $9\sqrt{5}$   
 c)  $7\sqrt{5}$

23. Calcula «x».



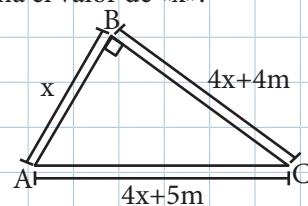
- a)  $\sqrt{41}$  cm      c)  $\sqrt{45}$  cm      e)  $\sqrt{49}$  cm  
 b)  $\sqrt{43}$  cm      d)  $\sqrt{47}$  cm

24. Calcula «x».



- a)  $2\sqrt{17}$  m      c)  $4\sqrt{3}$  m      e)  $6\sqrt{17}$  m  
 b)  $3\sqrt{17}$  m      d)  $5\sqrt{17}$  m

25. Determina el valor de «x».

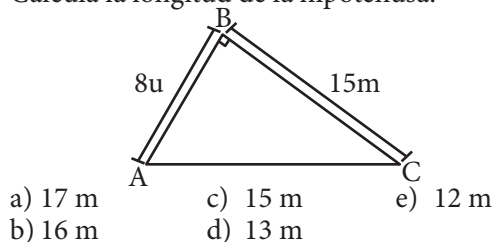


- a) 7 m      c) 8,5 m      e) 10 m  
 b) 8 m      d) 9 m

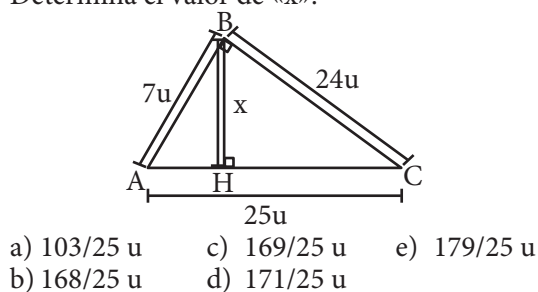
# Tarea

## Integral

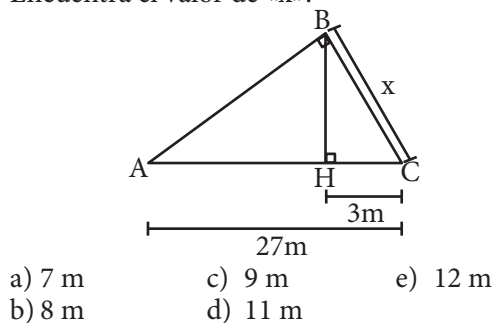
1. Calcula la longitud de la hipotenusa.



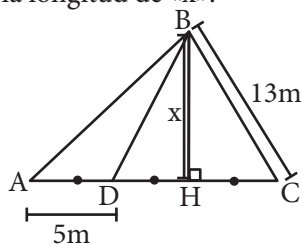
2. Determina el valor de «x».



3. Encuentra el valor de «x».



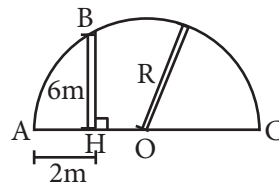
4. Determina la longitud de «x».



- a) 10 m      d) 14 m  
b) 11 m      e) 16 m  
c) 12 m

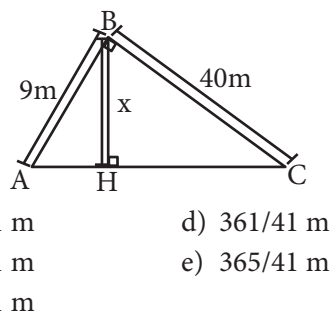
## PUCP

5. Calcula la longitud del radio de la semicircunferencia, donde O es centro.

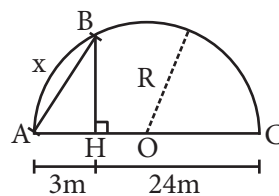


- a) 8 m      d) 12 m  
b) 9 m      e) 13 m  
c) 10 m

6. Determina el valor de «x».

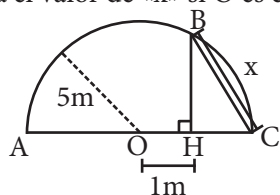


7. Calcula «x» si O es centro.



- a) 7 m      d) 11 m  
b) 8 m      e) 12 m  
c) 9 m

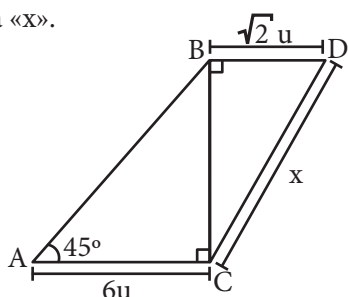
8. Determina el valor de «x» si O es centro.



- a)  $\sqrt{10}$  m      c)  $3\sqrt{10}$  m      e)  $5\sqrt{10}$  m  
b)  $2\sqrt{10}$  m      d)  $4\sqrt{10}$  m

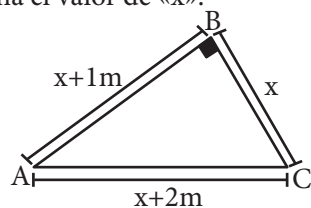
UNMSM

9. Calcula «x».



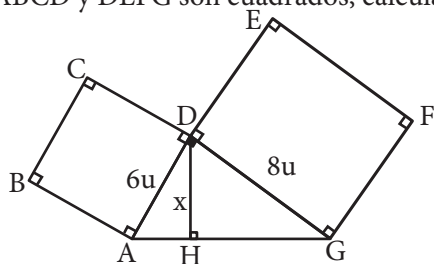
- a)  $\sqrt{31}$  u      c)  $\sqrt{35}$  u      e)  $\sqrt{39}$  u  
b)  $\sqrt{33}$  u      d)  $\sqrt{38}$  u

10. Determina el valor de «x».



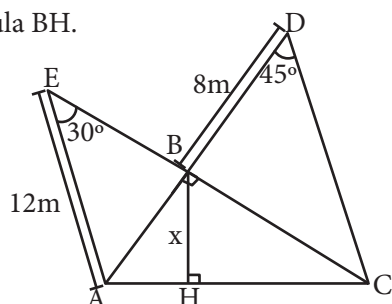
- a) 3 m      c) 5 m      e) 7 m  
b) 4 m      d) 6 m

11. Si: ABCD y DEFG son cuadrados, calcula «x».



- a) 4,8 u      c) 5 u      e) 5,4 u  
b) 4,9 u      d) 5,2 u

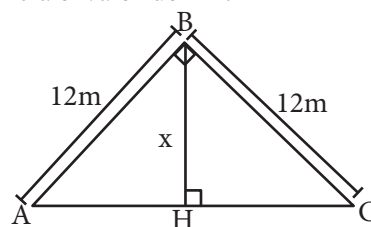
12. Calcula BH.



- a) 4,3 m      d) 4,8 m  
b) 4,6 m      e) 4,9 m  
c) 4,7 m

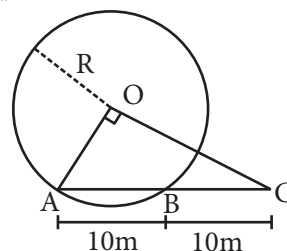
UNI

13. Encuentra el valor de «x».



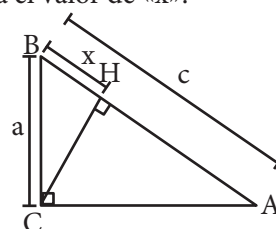
- a)  $4\sqrt{2}$  m      d)  $9\sqrt{2}$  m  
b)  $6\sqrt{2}$  m      e)  $10\sqrt{2}$  m  
c)  $7\sqrt{2}$  m

14. Calcula R.



- a) 5 m      d) 10 m  
b) 6 m      e) 12 m  
c) 8 m

15. Determina el valor de «x».



- a)  $a^2/c$       d)  $a/c^3$   
b)  $a/c$       e)  $a^2/c^2$   
c)  $a^3/c$

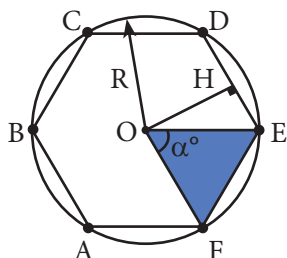




# POLÍGONOS REGULARES

## Capítulo 18

### I. POLÍGONO REGULAR



Es aquel polígono que es equilátero y equiángulo a la vez.

Centro: O

Circunradio: R

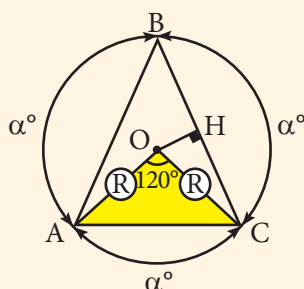
Ángulo central:  $\frac{360^\circ}{n} = \alpha^\circ$  («n»: N.º de lados)

Lado del polígono regular:  $\ell_n$

Apotema:  $\overline{OH}$

### II. CÁLCULO DEL LADO DE POLÍGONOS REGULARES MÁS USUALES

#### 1. Triángulo regular

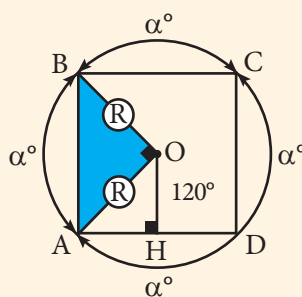


$$\alpha^\circ = m\widehat{AC} = 120^\circ$$

$$\ell_3 = R\sqrt{3}$$

$$OH = \text{apotema} = \frac{R}{2}$$

#### 2. Cuadrado

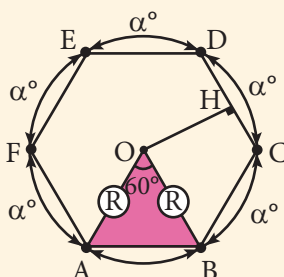


$$\alpha^\circ = m\widehat{AB} = 90^\circ$$

$$\ell_4 = R\sqrt{2}$$

$$OH = \text{apotema} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

#### 3. Hexágono regular

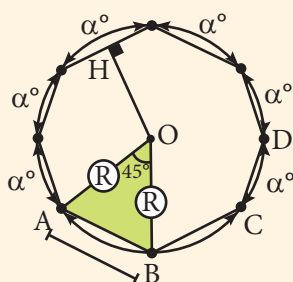


$$\alpha^\circ = m\widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\ell_6 = R$$

$$OH = \text{apotema} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

#### 4. Octágono regular



$$\alpha^\circ = m\widehat{AB} = 45^\circ$$

$$\ell_6 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$OH = \text{Apotema} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

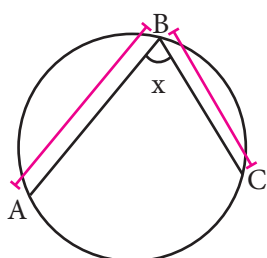
#### CUADRO DE RESUMEN

| Polígono regular |   | Ángulo central o arco que subtiende |   | $\ell_n$    |
|------------------|---|-------------------------------------|---|-------------|
| Triángulo        | → | 120°                                | → | $\ell_3$    |
| Cuadrado         | → | 90°                                 | → | $\ell_4$    |
| Pentágono        | → | 72°                                 | → | $\ell_5$    |
| Hexágono         | → | 60°                                 | → | $\ell_6$    |
| Octógono         | → | 45°                                 | → | $\ell_8$    |
| Decágono         | → | 36°                                 | → | $\ell_{10}$ |
| Dodecágono       | → | 30°                                 | → | $\ell_{12}$ |

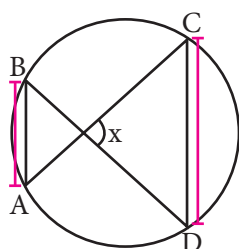
### Trabajando en clase

#### Integral

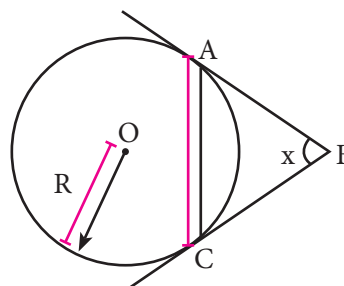
1. Calcula «x».



2. Calcula «x».



3. Calcula «x».



#### PUCP

4. Si el perímetro de un hexágono regular es 12 m, cuánto mide su lado.

**Resolución:**

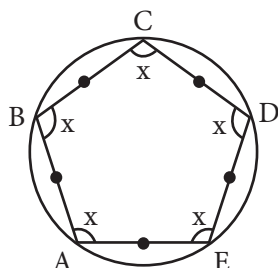
2p hexágono = 6n, donde n: número de lados

Reemplazando: 12 n = 6 n

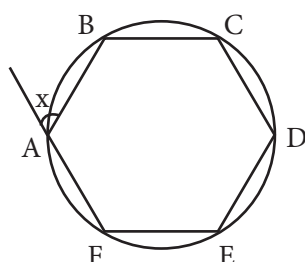
Luego, n = 2 m

5. Si el perímetro de un octógono regular es 24 m, ¿cuánto mide su lado?

6. Determina el valor de «x».

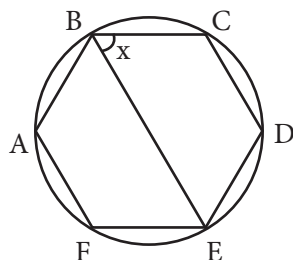


7. Si el polígono ABCDEF es regular, calcula «x».



### UNMSM

8. Si el polígono ABCDEF es regular, calcula «x».

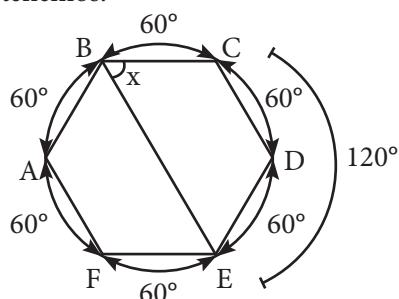


### Resolución:

Si el polígono es regular, se cumple:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = \dots = m\widehat{FA}$$

Luego, tenemos:



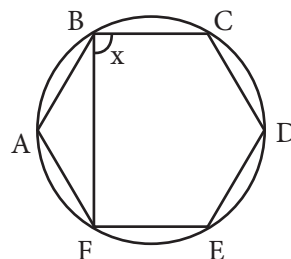
Pues los 6 arcos suman  $360^\circ$  y son iguales.

Finalmente, por ángulo inscrito:

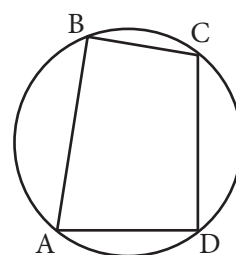
$$x = \frac{120^\circ}{2}$$

$$x = 60^\circ$$

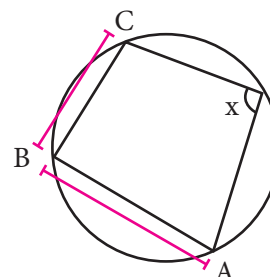
9. Si el polígono ABCDEF es regular, calcula «x».



10. Dada la figura, entonces  $\overline{CD}$  representa el lado de un \_\_\_\_\_.

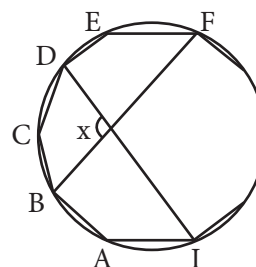


11. Calcula «x».



### UNI

12. Si el polígono ABCDEF... es un decágono regular, calcula «x».



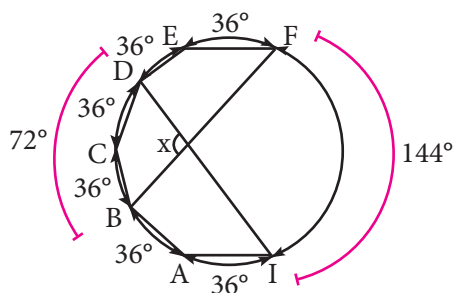
### Resolución:

Si el polígono es regular, se cumple:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = \dots = m\widehat{IA}$$

los 10 arcos tienen igual medida.

Luego, tenemos:



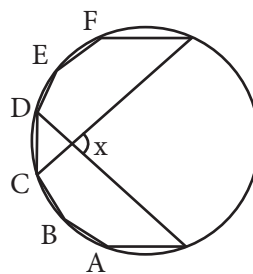
Pues los 10 arcos suman  $360^\circ$  y son iguales.

Finalmente, por ángulo interior:

$$x = \frac{72^\circ + 144^\circ}{2}$$

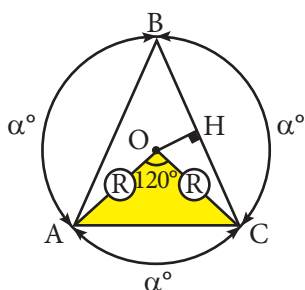
$$x = 108^\circ$$

13. Si el polígono ABCDEF... es un dodecágono regular, calcula «x».



## Esquema formulario

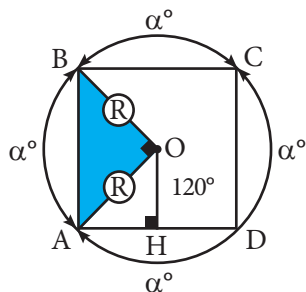
### POLÍGONOS REGULARES



$$\alpha^\circ = m\widehat{AC} = 120^\circ$$

$$\ell_3 = R\sqrt{3}$$

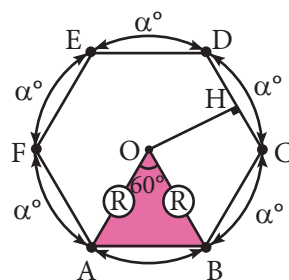
$$OH = \text{apotema} = \frac{R}{2}$$



$$\alpha^\circ = m\widehat{AB} = 90^\circ$$

$$\ell_4 = R\sqrt{2}$$

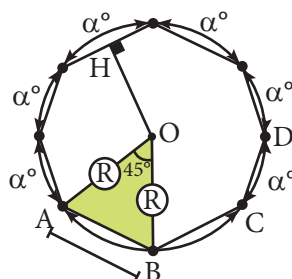
$$OH = \text{apotema} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



$$\alpha^\circ = m\widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\ell_6 = R$$

$$OH = \text{apotema} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



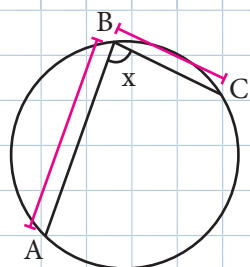
$$\alpha^\circ = m\widehat{AB} = 45^\circ$$

$$\ell_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$OH = \text{apotema} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

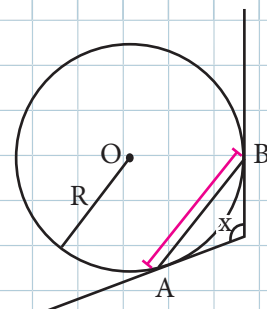
# Sigo practicando

16. Calcula «x».



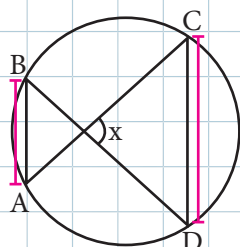
- a)  $84^\circ$       c)  $96^\circ$       e)  $100^\circ$   
b)  $92^\circ$       d)  $98^\circ$

18. Calcula «x».



- a)  $124^\circ$       c)  $128^\circ$       e)  $140^\circ$   
b)  $126^\circ$       d)  $132^\circ$

17. Calcula «x».

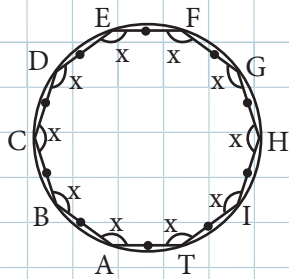


- a)  $72^\circ$       c)  $80^\circ$       e)  $84^\circ$   
b)  $78^\circ$       d)  $82^\circ$

19. ¿En qué polígono regular, la medida de un ángulo interior es el triple de su respectivo ángulo exterior?

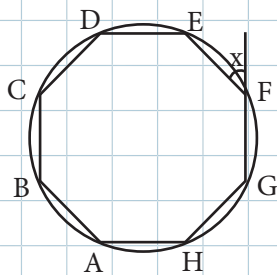
- a) Octógono regular  
b) Triángulo equilátero  
c) Pentágono regular  
d) Hexágono regular  
e) Decágono regular

20. Determina el valor de «X».



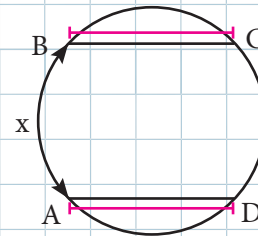
- a)  $120^\circ$       c)  $140^\circ$       e)  $156^\circ$   
b)  $136^\circ$       d)  $144^\circ$

21. Si el polígono ABCDEFGH es regular, calcula «X».



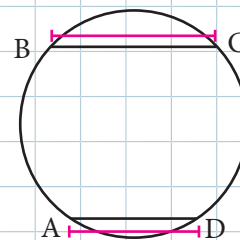
- a)  $41^\circ$       c)  $45^\circ$       e)  $48^\circ$   
b)  $43^\circ$       d)  $46^\circ$

22. Calcula «X» si  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ .



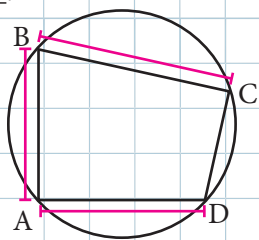
- a)  $70^\circ$       c)  $72^\circ$       e)  $78^\circ$   
b)  $71^\circ$       d)  $75^\circ$

23. Calcula la medida del ángulo formado por las intersecciones de  $\overline{BD}$  y  $\overline{AC}$ .



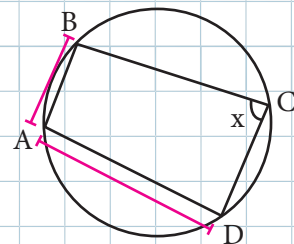
- a)  $82^\circ$       c)  $88^\circ$       e)  $92^\circ$   
b)  $86^\circ$       d)  $90^\circ$

24. Según la figura entonces,  $\overline{CD}$  representa el lado de un \_\_\_\_\_.



- a) triángulo equilátero
- b) cuadrado
- c) pentágono regular
- d) hexágono regular
- e) octágono regular

25. Calcula «x».

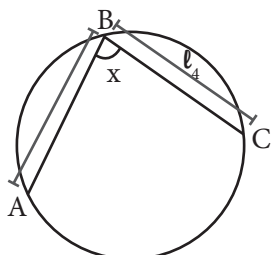


- a)  $79,5^\circ$
- b)  $80,5^\circ$
- c)  $81,5^\circ$
- d)  $82,5^\circ$
- e)  $89,5^\circ$

# Tarea

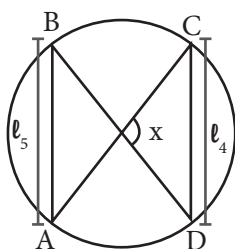
## Integral

1. Calcula «x».



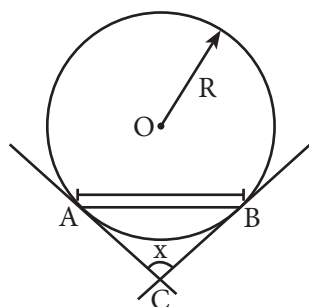
- a) 93°    c) 97°    e) 102°  
b) 95°    d) 99°

2. Calcula «x».



- a) 72°    c) 81°    e) 89°  
b) 78°    d) 83°

3. Calcula «x».



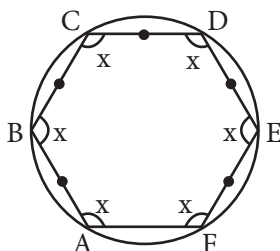
- a) 98°    c) 102°    e) 108°  
b) 100°    d) 106°

4. Si el perímetro de un decágono regular es 30 m. Calcula la longitud de su lado.

- a) 1 m    d) 4 m  
b) 2 m    e) 5 m  
c) 3 m

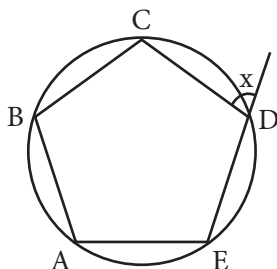
## PUCP

5. Determina el valor de «x».



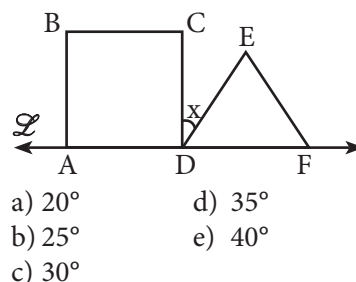
- a) 100°    c) 110°    e) 120°  
b) 130°    d) 140°

6. Si el polígono ABCDE es regular, calcula «x».



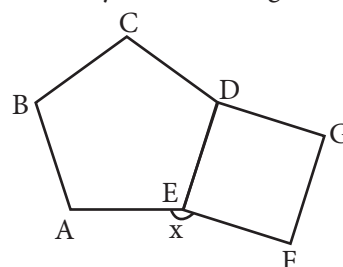
- a) 60°    d) 74°  
b) 68°    e) 78°  
c) 72°

7. Calcula «x» si los polígonos ABCD y DEF son regulares;  $\ell$  es una recta.



- a) 20°    d) 35°  
b) 25°    e) 40°  
c) 30°

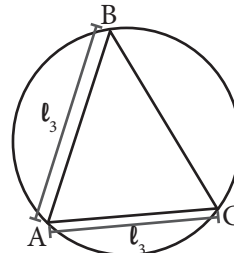
8. Calcula «x» si los polígonos ABCDE y EDGF son regulares.



- a) 132°    d) 160°  
b) 144°    e) 162°  
c) 150°

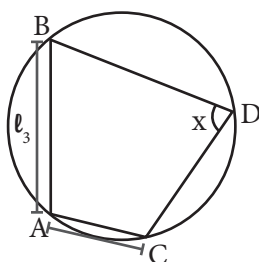
## UNMSM

9. Dada la figura, entonces  $\overline{BC}$  representa el lado de un.



- a) triángulo equilátero  
b) cuadrado  
c) pentágono regular  
d) hexágono regular  
e) decágono regular

10. Calcula «x».



- a)  $74^\circ$                       d)  $80^\circ$   
b)  $78^\circ$                       e)  $81^\circ$   
c)  $79^\circ$

11. Determina la medida de un ángulo exterior de un decágono regular.

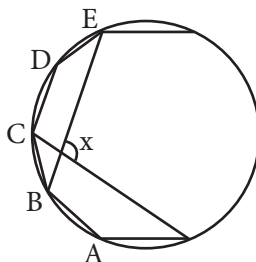
- a)  $31^\circ$                       d)  $38^\circ$   
b)  $34^\circ$                       e)  $40^\circ$   
c)  $36^\circ$

12. Calcula la medida del ángulo central de un dodecágono regular.

- a)  $25^\circ$                       d)  $30^\circ$   
b)  $28^\circ$                       e)  $32^\circ$   
c)  $29^\circ$

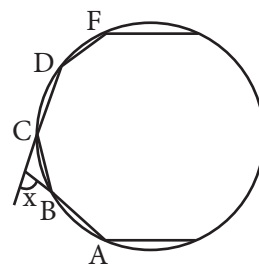
UNI

13. Si el polígono ABCDE... es un decágono regular, calcula «x».



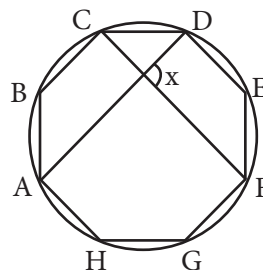
- a)  $102^\circ$                       d)  $108^\circ$   
b)  $104^\circ$                       e)  $110^\circ$   
c)  $106^\circ$

14. Si el polígono ABCDEF... es un decágono regular, calcula «x».



- a)  $18^\circ$                       d)  $64^\circ$   
b)  $48^\circ$                       e)  $72^\circ$   
c)  $52^\circ$

15. Si el polígono ABCDE... es un octógono regular, calcula «x».



- a)  $78^\circ$                       d)  $90^\circ$   
b)  $82^\circ$                       e)  $92^\circ$   
c)  $88^\circ$





# ALFONSO UGARTE SCHOOL

*Never stop learning because life never stops teaching*

**Razonamiento Matemático  
Segundo Año**





# ANALOGÍAS Y DISTRIBUCIONES

## Capítulo 13

### 1. Analogías

Son matrices de elementos en donde tendremos tres columnas, la del centro se distingue porque los números que se encuentran en ella, están entre paréntesis. La forma de solución, por lo general, es por filas (horizontal) y se trabaja con los extremos para obtener el valor central.

Ejemplo:

$$16 \quad (23) \quad 30 \Rightarrow \frac{16+30}{2} = 33$$

$$15 \quad (14) \quad 13 \Rightarrow \frac{15+13}{2} = 33$$

$$22 \quad (x) \quad 20 \Rightarrow \frac{22+20}{2} = 33$$

$$\Rightarrow x = 21$$

$$21 \quad (7) \quad 31 \Rightarrow 2 + 1 + 3 + 1 = 7$$

$$13 \quad (11) \quad 16 \Rightarrow 1 + 3 + 1 + 6 = 11$$

$$27 \quad (x) \quad 10 \Rightarrow 2 + 7 + 1 + 0 = 10$$

$$\Rightarrow x = 10$$

### 2. Distribuciones numéricas

Son matrices de elementos ubicados en filas y columnas. El desarrollo se obtiene trabajando por filas o columnas, nunca en diagonales. Utilizaremos las operaciones matemáticas para encontrar una regla de formación.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 12 \\ 4 & 5 & x \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 + 4 + 9 = 16 \\ 3 + 1 + 12 = 16 \\ 4 + 5 + x = 16 \\ \therefore x = 7 \end{array}$$

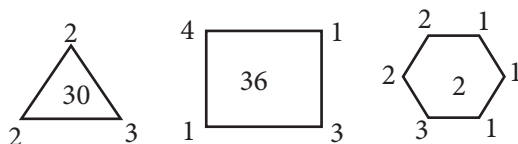
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3^1 = 3 & 2^2 = 4 & 1^5 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ x \\ 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \therefore x = 8$$

### 3. Distribuciones

En estos ejercicios, el mismo gráfico nos dará la idea de qué tenemos que operar para obtener el valor pedido.

Ejemplo:



$$f_1 = (2 + 5 + 3) 3 = 20$$

$$f_2 = (4 + 1 + 1 + 3) 4 = 36$$

$$f_3 = 3 + 3 + 1 + 1 + 2) 6 = 66$$

$$x = 66$$

## Trabajando en clase

### Integral

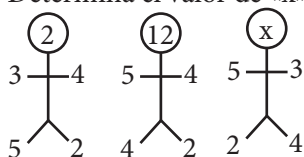
1. Resuelve:

|    |    |    |
|----|----|----|
| 10 | 11 | 5  |
| 13 | 3  | 10 |
| 4  | 8  | x  |

2. Calcula el valor de «x».

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 |
| 5 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | x |

3. Determina el valor de «x».



PUCP

4. Resuelve:

|    |      |    |
|----|------|----|
| 12 | (26) | 40 |
| 23 | (20) | 17 |
| 14 | (x)  | 12 |

Resolución:

$$12 \quad (26) \quad 40 \Rightarrow \frac{12+40}{2} = 26$$

$$23 \quad (20) \quad 17 \Rightarrow \frac{23+17}{2} = 20$$

$$14 \quad (x) \quad 12 \Rightarrow \frac{14+12}{2} = 13$$

$$\Rightarrow x = 13$$

5. Calcula el valor de «x».

|    |      |    |
|----|------|----|
| 12 | (15) | 18 |
| 20 | (29) | 38 |
| 36 | (x)  | 12 |

6. Calcula el valor de «x».

|    |    |    |
|----|----|----|
| 4  | 10 | 3  |
| 12 | 5  | 10 |
| 8  | x  | 14 |

7. Resuelve:

|    |      |   |
|----|------|---|
| 12 | (9)  | 3 |
| 20 | (19) | 9 |
| 36 | (x)  | 2 |

UNMSM

8. Calcula el valor de «x».

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 213 | (1) | 221 |
| 35  | (4) | 22  |
| 21  | (x) | 12  |

Resolución

$$213 \quad (1) \quad 221 \Rightarrow (2 \times 1 + 3) - (2 + 21) = 1$$

$$35 \quad (4) \quad 22 \Rightarrow (3 \times 5) - (2 + 2) = 4$$

$$21 \quad (x) \quad 12 \Rightarrow (2 \times 1) - (1 + 2) = 0$$

9. Determina el valor de «x».

|     |      |    |
|-----|------|----|
| 491 | (16) | 20 |
| 111 | (8)  | 23 |
| 37  | (x)  | 73 |

10. Resuelve:

|    |      |    |
|----|------|----|
| 26 | (25) | 30 |
| 56 | (9)  | 26 |
| 43 | (x)  | 20 |

11. Calcula el valor de «x».

|   |    |   |    |   |    |
|---|----|---|----|---|----|
| 2 | 3  | 3 | 4  | 2 | x  |
| 9 | 17 | 1 | 82 | 8 | 40 |

UNI

12. Resuelve:

|   |        |   |
|---|--------|---|
| 2 | (72)   | 3 |
| 4 | (1600) | 5 |
| 6 | (x)    | 2 |

Resolución:

$$2 \quad (72) \quad 3 \Rightarrow 2^3 \times 3^2 = 72$$

$$4 \quad (1600) \quad 5 \Rightarrow 4^3 \times 5^2 = 1600$$

$$6 \quad (x) \quad 2 \Rightarrow 6^3 \times 2^2 = 864$$

13. Resuelve:

|   |      |   |
|---|------|---|
| 4 | (68) | 2 |
| 3 | (36) | 3 |
| 2 | (x)  | 5 |

14. Calcula el valor de «x».

|    |   |    |   |   |   |
|----|---|----|---|---|---|
| 3  | 0 | 4  | 2 | 5 | 3 |
| 1  | 4 | 3  | 0 | 1 | 8 |
| 61 |   | 21 |   | x |   |

# • SIGO PRACTICANDO

16. Calcula el valor de «x».

|   |   |    |
|---|---|----|
| 8 | 8 | 25 |
| 7 | 6 | 19 |
| x | 3 | 49 |

- a) 2                      c) 5                      e) 7  
b) 3                      d) 6

17. Indica el valor de «x».

|    |      |    |
|----|------|----|
| 10 | (29) | 18 |
| 15 | (36) | 12 |
| 13 | (x)  | 4  |

- a) 28                      c) 42                      e) 150  
b) 36                      d) 31

18. Determina el valor de «x».

|     |     |       |
|-----|-----|-------|
| 21  | (9) | 42    |
| 102 | (8) | 302   |
| 203 | (x) | 10113 |

- a) 17                      c) 11                      e) 21  
b) 15                      d) 18

19. Señala el valor de «x».

|    |      |    |
|----|------|----|
| 13 | (95) | 46 |
| 22 | (35) | 31 |
| 43 | (x)  | 16 |

- a) 37                      c) 76                      e) 95  
b) 72                      d) 78

20. Determina el valor de «x».

|    |   |   |    |
|----|---|---|----|
| 22 | 2 | 4 | 15 |
| 36 | 3 | 9 | 21 |
| 35 | 7 | x | 13 |

- a) 7                      c) 6                      e) 13  
b) 8                      d) 12

21. Indica el valor de «x».

|    |      |    |
|----|------|----|
| 32 | (17) | 8  |
| 43 | (34) | 15 |
| 18 | (65) | x  |

- a) 23                      c) 16                      e) 31  
b) 21                      d) 14

22. Calcula  $x + y$ .

|   |    |   |    |    |
|---|----|---|----|----|
| 8 | 18 | y | 14 | 33 |
| 4 | 6  | 9 | 2  | 3  |
| 2 | 3  | x | 7  | 11 |

a) 72                      c) 50                      e) 42  
b) 62                      d) 36

23. Señala el valor de «x».

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 7 | x |
| 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 9 |

a) 11                      c) 12                      e) 9  
b) 5                      d) 7

24. Determina el valor de «x».

|    |     |    |
|----|-----|----|
| 18 | (7) | 24 |
| 45 | (8) | 27 |
| 33 | (x) | 88 |

a) 11                      c) 17                      e) 21  
b) 14                      d) 18

25. Calcula el valor de «x».

|    |    |    |
|----|----|----|
| 5  | 8  | 3  |
| 8  | 4  | 1  |
| 12 | 3  | 49 |
| 15 | 4  | 72 |
| 4  | 11 | x  |

a) 52                      c) 53                      e) 71  
b) 48                      d) 63

## Esquema formulario

### Distribución numéricas

Su relación puede darse vertical u horizontal, depende del ejercicio.

► Calcula «x»

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 5 |
| 9 | 1 | 5 |
| 7 | x | 4 |

**Solución:**

Horizontalmente, determinamos lo siguiente:

$$8 + 2 + 5 = 15$$

$$9 + 1 + 5 = 15$$

Luego:

$$7 + 1 + x + 4 = 15$$

$$x = 4$$

### Analogías numéricas

Ejercicios que constan de premisas, de donde extraemos una ley de formación y la aplicamos en la conclusión, que contiene a la incógnita. La relación, generalmente, se calcula horizontalmente.

► ¿Qué número falta?

|   |      |   |
|---|------|---|
| 2 | (17) | 1 |
| 9 | (29) | 2 |
| 8 | (x)  | 6 |

**Solución:**

De la premisas:  $3 \times 2 + 1 = 7$

$$3 \times 9 + 2 = 29$$

Determinamos lo siguiente:

$$3 \times 8 + 6 = x \rightarrow x = 30$$

# Tarea

## Integral

1. Calcula el valor de «x».

|    |    |    |
|----|----|----|
| 12 | 11 | 10 |
| 13 | 18 | 2  |
| 7  | 21 | x  |

- a) 5                      c) 7                      e) 9  
b) 6                      d) 8

2. Indica el valor de «x».

|   |    |   |
|---|----|---|
| 3 | 3  | 8 |
| 4 | 10 | 3 |
| 9 | 3  | x |

- a) 1                      c) 3                      e) 5  
b) 2                      d) 4

3. Determina el valor de «x».

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 4 |

- a) 6                      c) 5                      e) 20  
b) 7                      d) 4

4. Señala el valor de «x».

|    |      |    |
|----|------|----|
| 23 | (13) | 16 |
| 31 | (14) | 11 |
| 11 | (x)  | 16 |

- a) 5                      c) 7                      e) 9  
b) 6                      d) 8

## PUCP

5. Calcula el valor de «x».

|    |   |    |
|----|---|----|
| 17 | 3 | 10 |
| 12 | 5 | 13 |
| 8  | x | 14 |

- a) 1                      c) 8                      e) 13  
b) 7                      d) 10

6. Indica el valor de «x».

|    |     |   |
|----|-----|---|
| 3  | (4) | 3 |
| 12 | (9) | 5 |
| 36 | (x) | 1 |

- a) 11                      c) 13                      e) 20  
b) 12                      d) 19

7. Indica el valor de «x».

|     |      |    |
|-----|------|----|
| 211 | (8)  | 13 |
| 37  | (20) | 73 |
| 75  | (x)  | 11 |

- a) 11                      c) 21                      e) 31  
b) 14                      d) 27

8. Señala el valor de «x».

|   |    |   |   |   |   |
|---|----|---|---|---|---|
| 8 | 2  | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 65 | 4 | 5 | 7 | x |

- a) 5                      c) 9                      e) 2  
b) 7                      d) 8

## UNMSM

9. Calcula el valor de «x».

|   |       |    |
|---|-------|----|
| 5 | (100) | 2  |
| 4 | (144) | 3  |
| 2 | (x)   | 10 |

- a) 43                      c) 300                      e) 5  
b) 13                      d) 400

10. Determina el valor de «x».

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 4 | 3 |
| 4 | 9 | 2 | 8 |
| 5 | 2 | 2 | x |

- a) 5                      c) 10                      e) 8  
b) 6                      d) 15

11. Señala el valor de «x».

- |   |      |   |  |
|---|------|---|--|
| 2 | (25) | 3 |  |
| 7 | (81) | 2 |  |
| 5 | (x)  | 3 |  |
- a) 64                      c) 61                      e) 70  
b) 36                      d) 69

12. Indica el valor de «x».

- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 3 |
| 5 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | x |
- a) 3                      c) 5                      e) 7  
b) 2                      d) 6

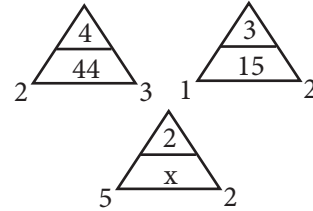
### UNI

13. Determina el valor de «x».

- |   |      |   |
|---|------|---|
| 5 | (16) | 2 |
| 2 | (22) | 6 |
| 3 | (x)  | 4 |

- a) 16                      c) 18                      e) 12  
b) 20                      d) 10

14. Calcula el valor de «x».



- a) 27                      c) 42                      e) 38  
b) 18                      d) 36

15. Señala el valor de «x».

- |    |    |   |
|----|----|---|
| 4  | 2  | 8 |
| 3  | 12 | 2 |
| 15 | 3  | x |
- a) 12                      c) 17                      e) 19  
b) 15                      d) 11



# PROBLEMAS SOBRE INTERVALOS DE TIEMPO, LONGITUDES Y SALUDOS

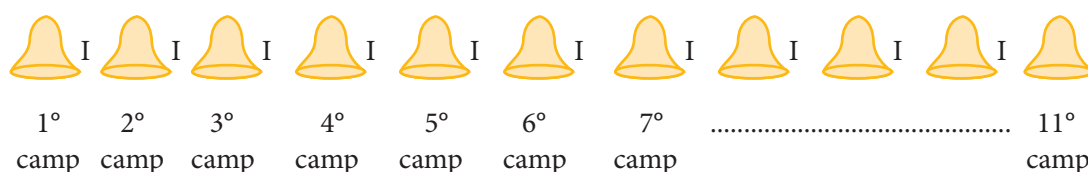
## Capítulo

14

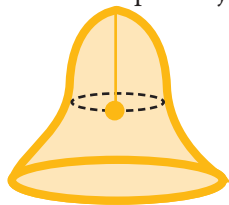
### 1. Intervalos de tiempo y campanadas

En este tema, revisaremos los ejercicios de intervalos de tiempo relacionados con la vida diaria que involucren a las campanadas. Aquí aplicaremos técnicas de razonamiento inductivo.

Si el campanario de la catedral de Lima da 11 campanadas en 5 segundos, ¿cuántas campanadas dará en 8 segundos?



Donde «I» será el intervalo que hay entre campanada y campanada.  
Para este tipo de ejercicios no trabajaremos con las campanadas.



$$\text{Número de intervalos} = \text{Número de campanadas} - 1$$

Observación: Se puede usar el siguiente cuadro:

| Número de campanadas (C) | Número intervalos (I) | Tiempo (T) |
|--------------------------|-----------------------|------------|
| 5                        | 4                     | 8          |
| 8                        | 7                     | x          |

$$4x = 56$$

$$x = 14$$

### 2. Cortes y estacas

Analizamos el siguiente gráfico:



Entonces:

| Nº cortes | Nº partes | Nº estacas |
|-----------|-----------|------------|
| (n - 1)   | (n)       | (n + 1)    |

### 3. Para figuras cerradas

Veamos el siguiente gráfico

|            |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |       |                                                                                     |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|            |  |  |  | ..... |  |
| Nº cortes  | 2                                                                                 | 3                                                                                 | 4                                                                                 | ..... | n                                                                                   |
| Nº estacas | 2                                                                                 | 3                                                                                 | 4                                                                                 | ..... | n                                                                                   |
| Nº partes  | 2                                                                                 | 3                                                                                 | 4                                                                                 | ..... | n                                                                                   |

Entonces:

$$\text{Nº cortes} = \text{Nº estacas} = \text{Nº partes}$$

$$\frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud unitaria}} = \frac{\text{Perímetro}}{\text{Longitud de cada espacio}}$$

### 4. Problemas sobre saludos

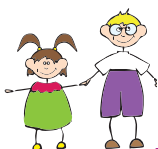
La cantidad de saludos que pueden realizar «n» personas

$$\text{Número de saludos} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Veamos:

Número de saludos

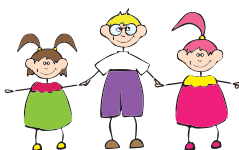
Cantidad de personas



$$= 1$$

$$= \frac{2 \times 1}{2}$$

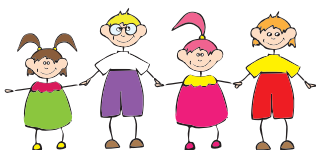
cantidad de personas



$$= 3$$

$$= \frac{3 \times 2}{2}$$

cantidad de personas



$$= 6$$

$$= \frac{4 \times 3}{2}$$

cantidad de personas

## Trabajando en clase

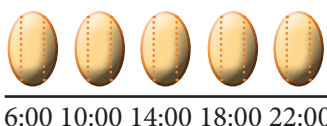
### Integral

1. Si una alarma tarda 5 segundos en dar 5 campanadas, ¿qué tiempo tardará en dar 13 campanadas?
2. Se divide una soga de 200 metros en partes iguales mediante 4 cortes. ¿Cuánto mide cada pedazo?
3. A una reunión asistieron 20 personas. Si cada una de ellas fue cortés con las demás, ¿cuántos saludos se realizaron?

### PUCP

4. Un paciente tiene que tomar una pastilla cada 4 horas. Si empezó a tomarlas a las 6:00 am, ¿cuántas pastillas habrá tomado hasta las 10:00 pm?

Resolución:



Habría tomado 5 pastillas:

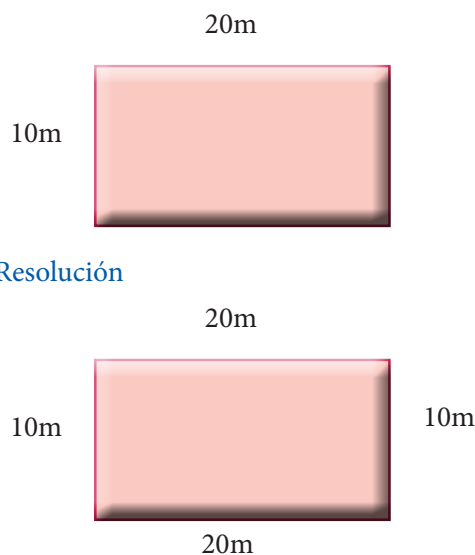
$$\text{Número de pastillas} = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Tiempo unitario}} + 1$$

$$\text{Nº total de pastillas} = \frac{22 - 6}{4} + 1 = 5 \text{ pastillas}$$

5. Si Martín debe tomar una pastilla cada 45 min, ¿cuántas pastillas tomará desde las 10:00 am hasta la 1:00 pm del mismo día?
6. Si un campanario demoró 6 segundos en dar 3 campanadas, ¿cuánto tiempo demorará en dar 8 campanadas?
7. Si Mario toca la puerta dando 5 golpes en 2 segundos, ¿cuántos golpes dará en 6 segundos?

### UNMSM

8. En el siguiente terreno rectangular se desea colocar estacas cada 5 m. ¿Cuántas estacas se colocarán en total si se coloca una en cada esquina?



Resolución

Figura cerrada:

$$\frac{\text{Perímetro total}}{\text{Longitud de cada espacio}} = \frac{60 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 12 \text{ m}$$

9. En la siguiente figura de lados iguales, se colocan estacas cada 1m. ¿Cuántas estacas se colocan en total si se colocó una en cada esquina?



10. Un campeonato de fútbol convocó a 6 equipos. Si todos juegan contra todos, ¿cuántos partidos se realizaron?
11. Juan fue al hospital por una infección estomacal y el doctor le recomendó un tratamiento, que consiste en la toma de una pastilla cada 6 horas durante 4 días. ¿Cuánto tendrá que gastar en el tratamiento si cada pastilla vale S/.3?

## UNI

12. Si en una fiesta se encuentran 10 parejas de esposos, ¿cuántos saludos en total se observa?

Resolución:

Total de personas: 20

$$\text{Número de saludos} \Rightarrow \frac{22 \times 19}{2} - 10$$

$$= 190 - 10 = 180$$

Se quita el par de parejas que ya se saludaron.

13. Si a una reunión asisten cuatro familias con cuatro miembros cada una, ¿cuántos saludos se realizan en dicha reunión?

14. Una pistola «P<sub>1</sub>» puede realizar 9 disparos en 48 segundos, y una pistola «P<sub>2</sub>» es capaz de realizar 7 disparos en 18 segundos. Si tengo ambas pistolas, una en cada mano, ¿cuántos disparos podré realizar en 30 segundos?

## • SIGO PRACTICANDO

16. Si en una iglesia tocan 10 campanadas en 27 segundos, ¿cuántas campanadas se escucharon en 12 segundos?
- a) 8                      c) 10                      e) 5  
b) 6                      d) 7
17. Si a un aro de 20 metros se le hacen 10 cortes, ¿cuánto mide cada pedazo?
- a) 1                      c) 5                      e) 4  
b) 2                      d) 3
18. Si en un campeonato de fútbol participan 4 equipos, ¿cuántos partidos se realizarán en total?
- a) 6                      c) 4                      e) 10  
b) 7                      d) 9
19. ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada, cuya área es de  $7225 \text{ m}^2$ , si las estacas se colocan cada  $10 \text{ m}^2$ ?
- a) 32                      c) 30                      e) 28  
b) 17                      d) 34
20. En el campanario de una iglesia se hace oscilar el péndulo, dando tres campanadas en seis segundos. ¿En cuántos segundos se dieron 7 campanadas?
- a) 18                      c) 16                      e) 14  
b) 17                      d) 15
21. Un reloj de pared indica la hora con igual números de campanadas. Si para indicar las 6:00 pm demora a segundos, ¿qué hora es si dicho reloj ha tocado campanadas durante 18 segundos?
- a) 11:00 pm                      d) 7:00 am  
b) 12:00 pm                      e) 1:00 am  
c) 6:00 am
22. Si en una reunión se contaron 36 saludos, ¿cuántas personas había en dicha reunión?
- a) 9                      c) 11                      e) 14  
b) 10                      d) 13
23. ¿Cuántos cortes debemos dar a una soga de 420 metros de longitud para obtener pedazos de 21 metros?
- a) 21                      c) 12                      e) 13  
b) 28                      d) 19

24. En una pista de salto de vallas hay 23 de estas, separadas por una distancia de 3 metros. ¿Cuál es la longitud entre la última y la primera valla?

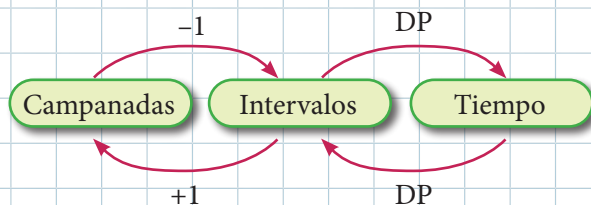
- a) 55                      c) 66                      e) 50  
b) 70                      d) 85

25. Si un fusil automático puede disparar 7 balas por segundo, ¿cuántas balas disparará en 1 minuto?

- a) 420                      c) 361                      e) 500  
b) 340                      d) 480

## Esquema formulario

### Problemas sobre campanadas



### Problemas sobre cortes y pedazos:

#### Figuras abiertas

| Cortes | Pedazos |
|--------|---------|
| x      | x-1     |

#### Figuras cerradas

| Cortes | Pedazos |
|--------|---------|
| x      | x       |

### Problemas sobre estacas

$$\text{Número de estacas} = \frac{\text{Distancia total}}{\text{Distancia unitaria}} + 1$$

### Problemas sobre saludos teniendo «n» personas

$$\text{Número de saludos} = \frac{n(n-1)}{2}$$

## • Tarea

### Integral

- Si una iglesia toca 9 campanadas en 16 segundos, ¿en cuánto tiempo se escuchará 11 campanadas?  
a) 20                      c) 28                      e) 35  
b) 25                      d) 30
- Si se divide una soga de 100 metros se divide en partes iguales mediante 9 cortes, ¿cuánto mide cada pedazo?  
a) 10                      c) 12                      e) 20  
b) 11                      d) 13
- A una reunión asisten 10 personas; si cada una de ellas fue cortés con las demás, ¿cuántos saludos se realizaron?  
a) 45                      c) 180                      e) 40  
b) 90                      d) 80
- ¿Cuántas pastillas tomará un enfermo en un día, si debe de tomarlas cada 2 horas?  
a) 12                      c) 14                      e) 16  
b) 13                      d) 11

### PUCP

- Si un campanario demoró 5 segundos en dar 11 campanadas, ¿cuántas campanadas se escucharán en 10 segundos?  
a) 5                      c) 10                      e) 21  
b) 6                      d) 20
- Si José dispara 10 veces en 18 segundos, ¿en qué tiempo logrará disparar 5 veces?  
a) 9                      c) 7                      e) 19  
b) 8                      d) 10

- Se tiene un terreno en forma de hexágono de lados iguales, cuya medida es 4 metros. ¿Cuántas estacas se pueden colocar, si se colocan cada 1 metro y en cada vértice?  
a) 24                      c) 4                      e) 3  
b) 25                      d) 5
- ¿Cuántos partidos en total podrían jugar 10 equipos en dos ruedas?  
a) 90                      c) 180                      e) 80  
b) 10                      d) 70

### UNMSM

- Jimmy tiene que tomar pastillas, el doctor le recomendó tomarlas cada 4 horas, durante una semana. Si cada pastilla cuesta S/. 3, ¿cuánto dinero pagará por todas las pastillas?  
a) S/. 86                      c) S/. 89                      e) S/. 81  
b) S/. 87                      d) S/. 80
- Si en una reunión se encuentran 8 parejas de esposos, ¿cuántos saludos se cuentan en total?  
a) 20                      c) 23                      e) 18  
b) 21                      d) 19
- Si una pistola puede realizar «m» disparos en 1 segundo, ¿cuántos segundos demorará en realizar  $m^2$  disparos?  
a) m                      c)  $m - 1$                       e)  $m^2 + 1$   
b)  $m + 1$                       d)  $m^2 - 1$
- Si sobre un terreno cuadrangular de 15 m de lado, se deben colocar postes distanciadas por 5 m uno del otro, ¿cuántos postes se deben colocar?  
a) 8                      c) 12                      e) 165  
b) 10                      d) 14

## UNI

13. Si Pizarro puede patear 20 penales en 190 segundos, ¿cuántos penales podrá patear en 40 segundos?

- a) 1                      c) 3                      e) 5  
b) 2                      d) 4

14. Si un reloj da 9 campanadas en 12 segundos, ¿en cuántos segundos dará 15 campanadas?

- a) 22,5                      c) 24                      e) 21  
b) 20                      d) 19

15. Se desea poner una cerca en el lado derecho de un jardín. Si dicha cerca mide 15 m de longitud y para sostenerla se ponen postes cada tres metros, ¿cuántos postes se necesitaron?

- a) 4                      c) 6                      e) 18  
b) 5                      d) 10



# ORDENAMIENTOS LINEALES

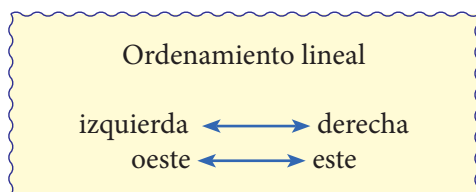
## Capítulo 15

Es el más común de los ordenamientos. El problema consiste en ordenar una serie de objetos o personas, de acuerdo a una característica como por ejemplo el tamaño, peso, edad o antigüedad, etc. Antes de resolver lee las siguientes observaciones:

### Observaciones

Hay una gran variedad de problemas de este tipo y lo primero que debes tener en cuenta es que no todos los ordenamientos lineales necesitan de un esquema desde el inicio. Hay casos en los que debes jugar con los datos en cada una de las preguntas para poder precisar un ordenamiento. Los primeros problemas que trataremos serían aquellos en los que se puede plantear un esquema con datos iniciales.

Para obtener un esquema claro debe; luego de leer los datos, fijar un eje de referencia; por ejemplo:



De la información que te proporcione el texto del problema, toma primero lo que más te convenga. Generalmente, al menos hay un dato tipo y en afirmativo.

Tu gráfico debe representar todos los posibles ordenamientos generados por los datos y reglas del problema, ten en cuenta, lo siguiente:

A no es mayor que B equivale a «A es menor o igual que B».  
A no es menor que B equivale a «A es mayor o igual que B».

Realiza esquemas claros y sencillos, que cumplan todas las condiciones del problema.



## Trabajando en clase

### Integral

#### Juego lógico verbal 1

Cuatro amigos viven en una misma cuadra y ellos son: Adán, Baltasar, César y Darío, y se sabe:

Adán vive a la izquierda de Darío.

La casa de Adán queda junto a la de Darío y a la derecha de la de César.

César vive a la derecha de Baltasar.

1. ¿Quién vive al oeste de todos?
2. ¿Cuántos ordenamientos hay?
3. ¿Quién o quiénes están a la derecha de Adán?

### Católica

#### Juego lógico verbal 2

Cuatro hermanos van al cine y se sientan en una sola fila.

Carmen y Gabriela no se sientan al lado de Juana.  
Carmen se sienta entre Adela y Gabriela.

4. ¿Cuántos ordenamientos hay?

Resolución:

- ✓ Gabriela Carmen Adela Juana
  - ✓ Juana Adela Carmen Gabriela
- ∴ Dos ordenamientos

5. Si Adela está a la izquierda de Carmen, ¿cuántos ordenamientos hay?

### Juego lógico verbal 3

Cinco amigos conversan sobre su edad y entre ellos acuerdan lo siguiente:

Alberto es mayor que Bruno, pero menor que Carlos.  
Diego es menor que Alberto, pero mayor que Estéfano.  
Bruno es mayor que Estéfano.  
Ninguno tiene la misma edad.

6. ¿Cuántos ordenamientos hay?  
7. ¿Quién es el menor?

### UNMSM

### Juego lógico verbal 4

Cuatro amigos van al cine y se sientan en una sola fila:

Alberto se sienta a la izquierda de Carlos.  
Carlos está junto a Alberto y a la derecha de Baltasar.  
A la izquierda de Baltasar está sentado Juan.

8. ¿Quiénes están sentados en los extremos?

Resolución:



∴ Juan y Carlos.

9. ¿Quién o quiénes están adyacentes Baltasar y Carlos?

### Juego lógico verbal 5

Seis amigas: Ana, Bety, Cecilia, Doris, Eva y Lili, viven en un edificio de seis pisos, cada una en un piso diferente.

Si se sabe lo siguiente:

Eva vive entre Bety y Doris y junto a ellas.  
Lili no vive en el último piso.

El cuarto piso está ocupado por Ana.  
Ana vive entre Doris y Lili y junto a ellas.

10. Se puede afirmar que:

- Cecilia vive en el sexto piso.
- Bety vive en el tercero.
- Doris no vive en el tercero.
- Bety vive en el tercer piso.

11. ¿Quién o quiénes viven arriba de Ana?

### UNI

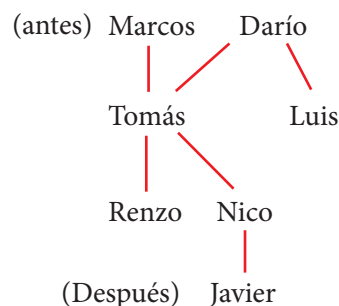
### Juego lógico verbal 6

Siete atletas: Marco, Darío, Luis, Tomás, Nico, Javier y Renzo, participaron en una carrera. El orden en que los atletas cruzaron la meta cumple con las siguientes condiciones:

Tomás llegó antes que Renzo, pero después de Marco.  
Nico llegó después de Tomás, pero antes que Javier.  
Darío llegó antes que Tomás y que Luis.  
No hubo empates.

12. ¿Cuántas personas pudieron llegar en primer lugar?

Resolución:



13. ¿Cuántas personas pudieron llegar en último lugar?

14. Si Marcos llegó antes que Darío, ¿quién llegó en primer lugar?

## Sigo practicando

### Juego lógico verbal 1

De un grupo de cinco amigos se sabe que Luis es mayor que Juan, pero menor que Alonso; además, se sabe que Ana no es menor que Julia, quien es menor que Juan.

16. ¿Cuál es el mayor de los amigos?

- |           |          |
|-----------|----------|
| a) Alonso | d) Julio |
| b) Luis   | e) Ana   |
| c) Juan   |          |

17. ¿Quiénes pueden tener la misma edad?

- |                  |                  |
|------------------|------------------|
| a) Julia y Ana   | d) Juan y Alonso |
| b) Luis y Juan   | e) Juan y Julia  |
| c) Alonso y Luis |                  |

18. Entonces, podríamos afirmar que:

- I. Alonso es mayor que Julia.  
 II. Ana es menor que Luis.  
 III. Juan y Ana tienen la misma edad.
- |                |                  |
|----------------|------------------|
| a) I           | d) Solo II y III |
| b) II          | e) Todas         |
| c) Solo I y II |                  |

### Juego lógico verbal 2

19. De cinco amigos, se sabe que Mario tiene 2 años menos que Pedro, Luis tiene 1 año menos que José, Raúl tiene 2 años más que Luis y José tiene 3 años más que Mario. Si el menor de ellos tiene 14 años, calcula la suma de las edades de Pedro y Raúl.

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| a) 34 | c) 22 | e) 20 |
| b) 32 | d) 21 |       |

20. ¿Quién de los amigos tiene mayor edad?

- |          |         |
|----------|---------|
| a) Mario | d) Raúl |
| b) Pedro | e) José |
| c) Luis  |         |

### Juego lógico verbal 3

Cierto día de verano, cinco estudiantes decidieron ir a practicar andinismo en las afueras de Lima. Mientras subían se dieron cuenta de lo siguiente:

- Carlos se encuentra arriba de Maribel.
- Fiorella se encuentra debajo de Maribel.
- José y Carmen tienen que gritar muy fuerte para comunicarse, ya que se encuentran en los extremos de la formación.

21. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

- |      |      |      |
|------|------|------|
| a) 1 | c) 3 | e) 5 |
| b) 2 | d) 4 |      |

22. ¿Quién ocupa la ubicación intermedia?

- |             |           |
|-------------|-----------|
| a) Carlos   | d) José   |
| b) Maribel  | e) Carmen |
| c) Fiorella |           |

23. Si José esta arriba de Carlos, ¿cuántas personas están encima de Carmen?

- |            |      |
|------------|------|
| a) Ninguna | d) 3 |
| b) 1       | e) 4 |
| c) 2       |      |

#### Juego lógico verbal 4

En una carrera de caballos se sabe que El Perdido llegó en una posición adyacente a Locura y Mal Hombre; Anfibio ganó la carrera y Astroboy no llegó último, no hubo empates.

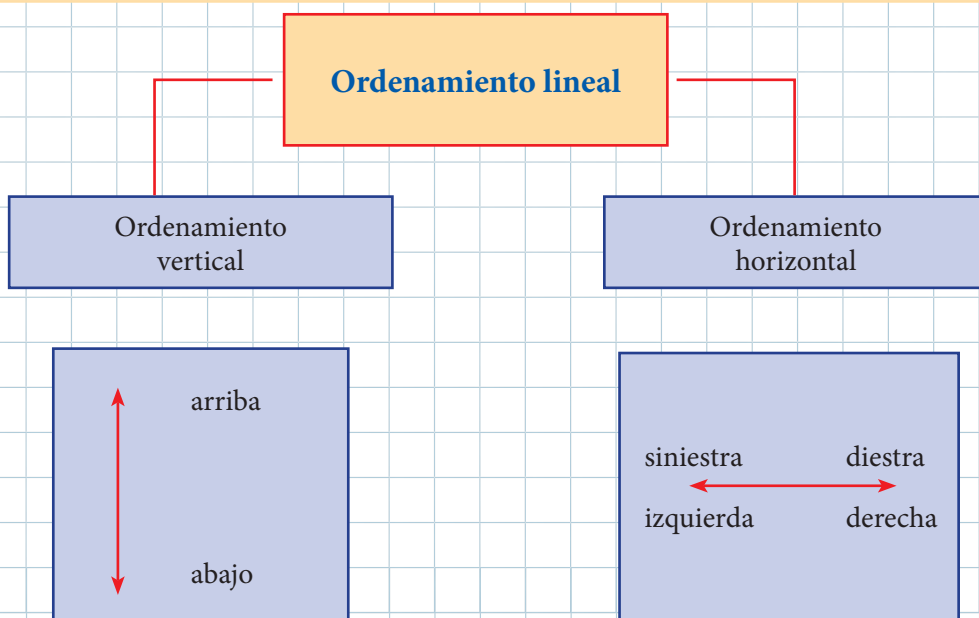
24. ¿Qué caballo llegó en segundo lugar?

- |               |             |
|---------------|-------------|
| a) Perdido    | d) Anfibio  |
| b) Locura     | e) Astroboy |
| c) Mal Hombre |             |

25. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

- |      |      |      |
|------|------|------|
| a) 1 | c) 3 | e) 5 |
| b) 2 | d) 4 |      |

### Esquema formulario



## • Tarea

### Integral

#### Juego lógico verbal 1

Si se sabe que Juan es mayor que Marcos y que Paolo, pero este último es mayor que José y que Mario.

- ¿Cuál de las siguientes relaciones no es verdadera?  
a) Mario es menor que Paolo.  
b) José es menor que Juan.  
c) Juan es mayor que Mario.  
d) Marcos es menor que Juan.  
e) Paolo es menor que Marcos.
- ¿Cuántos ordenamientos hay?  
a) 1  
b) 2  
c) 3  
d) 4  
e) 5

#### Juego lógico verbal 2

Sobre una mesa hay 3 naipes en hilera, a la izquierda del rey hay un as, a la derecha de la jota, hay uno de diamantes, a la izquierda del diamante hay uno de tréboles, a la derecha del de corazones hay una jota.

- ¿Cuál es el naipe del medio?  
a) Rey de tréboles  
b) As de tréboles  
c) Jota de tréboles  
d) As de diamantes  
e) Jota de tréboles
- ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

- a) 1  
b) 2  
c) 3  
d) 4  
e) 5

### PUCP

#### Juego lógico verbal 3

Cinco amigos: Amalia, Carmen, Dora, Lourdes y Susana, viven en un edificio de cinco pisos. Cada una en un piso diferente. Además se cumple que:

El piso donde vive Amalia está adyacente a los pisos donde viven Lourdes y Susana.  
Lourdes vive más arriba que Dora, pero más abajo que Carmen.

- ¿Quién vive en el quinto piso?  
a) Carmen  
b) Lourdes  
c) Dora  
d) Susana  
e) No se puede determinar
- ¿Quién vive en el primer piso?  
a) Carmen  
b) Lourdes  
c) Dora  
d) Susana  
e) No se puede determinar
- Para determinar el orden en que viven las cinco amigas, basta saber que:  
I. Lourdes vive más arriba que Susana.  
II. Carmen y Susana viven en pisos adyacentes.

- a) I  
b) II  
c) I y II  
d) I o II  
e) Faltan datos

- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?  
a) Lourdes vive en el segundo piso.  
b) Susana vive en un piso adyacente a Dora.  
c) Susana vive en el piso más arriba que Lourdes.  
d) Dora vive en el piso más alto.  
e) Amalia vive en el tercer piso.

### UNMSM

#### Juego lógico verbal 4

En cierto concurso de gorditos participan cinco amigos, además se sabe que:

Víctor pesa más que Gonzalo.  
Julio no pesa más que Víctor.  
Pool no pesa más que Fernando.  
Es falso que Víctor pese más que Pool.

- Si todos tuvieran pesos diferentes, ¿quién sería el que pese más?  
a) Gonzalo  
b) Julio  
c) Fernando  
d) Pool  
e) Víctor

10. ¿Quiénes pueden pesar igual que Víctor?

- I. Julio
- II. Fernando
- III. Pool
- a) Solo I
- b) Solo III
- c) Solo II y III
- d) Solo II
- e) Solo I y III

### Juego lógico verbal 5

Pepe, Enrique, Rafael, Álvaro y Juan son amigos. Si se sabe lo siguiente:

Enrique es mayor que Pepe, pero menor que Rafael.  
Álvaro es mayor que Enrique, pero menor que Juan.  
Juan es mayor que Álvaro, pero menor que Rafael.

11. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

- a) 1            c) 3            e) 5
- b) 2            d) 4

12. Si los ubicamos por edades de mayor a menor, ¿quién ocupa la posición intermedia?

- a) Juan
- b) Enrique
- c) Pepe
- d) Álvaro
- e) Rafael

### UNI

### Juego lógico verbal 6

Siete personas se sientan en la misma fila de un teatro: Ana, Fabiana, Hilda, Jéssica, Mario, Oswaldo y Paula. Los asientos se encuentran numerados del 1 al 7, empezando por la izquierda. Además, se sabe que:

- Jessica está en el asiento 4 y a la derecha de Mario.
- Paula y Oswaldo se han sentado juntos.
- Ana no está sentada en un extremo de la fila.
- Hilda está en el asiento 6.

13. ¿Cuál de los siguientes es un ordenamiento posible del 1 al 7?

- a) Paula, Oswaldo, Ana, Jessica, Mario, Hilda, Fabiana
- b) Paula, Oswaldo, Mario, Jessica, Fabiana, Hilda, Ana

- c) Paula, Oswaldo, Mario, Jessica, Ana, Hilda, Fabiana
- d) Mario, Paula, Oswaldo, Jessica, Ana, Hilda
- e) Paula, Mario, Oswaldo, Jessica, Ana, Hilda, Fabiana

14. Si Paula se sientan junto a Mario, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Oswaldo está sentado en el extremo izquierdo.
- b) Mario está sentado junto a Jessica.
- c) Paula está sentada en el asiento 2.
- d) Oswaldo está sentado en el asiento 3.
- e) Paula está sentada a la izquierda de Mario.

15. Si Paula está sentada a la derecha de Mario, ¿cuántos ordenamientos diferentes, de las siete personas en la fila son posibles?

- a) 1            d) 4
- b) 2            e) 5
- c) 3



# ORDENAMIENTO CIRCULAR

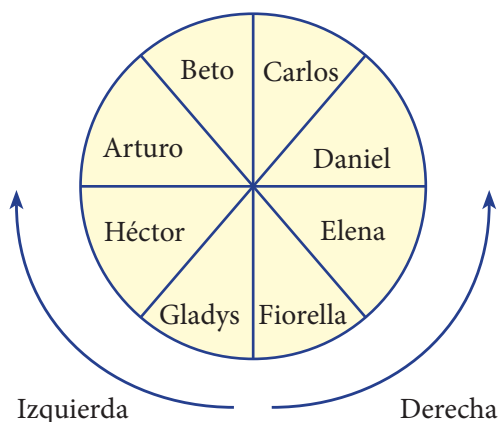
## Capítulo 16

### Recomendaciones

Los ordenamientos circulares, generalmente, se refieren a mesas circulares con asientos igualmente espaciados alrededor de estos. Para elaborar esquemas de ordenamientos con mesas, lo primero que debes hacer es fijarte en el número de sillas y el número de personas, en algunos casos coinciden y en otros no; ya que hay una o más sillas desocupadas.

Es importante que te percares de si es un número par o impar de sillas, igualmente espaciadas alrededor de la mesa, pues si es un número par de sillas, unas quedarán frente a otras, de lo contrario jamás ocurrirá que haya una frente a otra.

Te recomendamos comenzar por el dato que te ofrezca mayor información (porque relaciona dos o tres personajes) o aquel que pueda fijar más fácilmente.



Además:  
El gráfico tiene que indicar que viven uno este frente a otro.

### Observaciones

Para saber derecha o izquierda se analiza a partir de las personas sentadas.

Las personas sentadas tienen que observar el centro de la mesa y estar distribuidas.

## Trabajando en clase

### Integral

#### Juego lógico verbal 1

Cuatro amigas se sientan en una mesa circular de manera que Ana y Celia no se sientan juntas y Delia está a la derecha de Celia.

1. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?
2. ¿Quién se sienta frente a Ana?
3. ¿Qué personas están adyacentes a Ana?

### Católica

#### Juego lógico verbal 2

En una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente, se sientan cinco amigos: Róger, Samuel, Tito, Vania y Violeta. Además, se sabe lo siguiente:

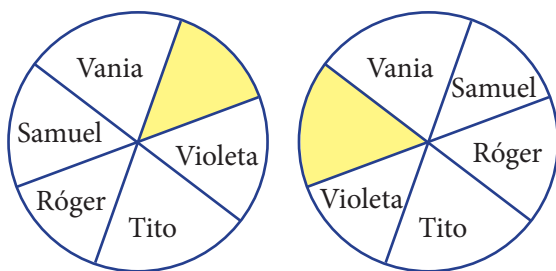
Tito se sienta junto a Róger y Violeta.

Vania se sienta frente a Tito.

Violeta y Samuel no se sientan juntos.

4. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

Resolución:



∴ 2 ordenamientos son posibles

5. Si Róger esta a la derecha de Tito, ¿cuántos ordenamientos hay?
6. ¿Frente a quién se sienta Samuel?

### Juego lógico verbal 3

7. Seis amigos se ubican alrededor de una mesa circular. Malchi no está sentado al lado de Pina ni de Lito. Zory no está al lado de Yalú ni de Lito. Pina no está al lado de Yalú ni de Zory. Pepe está junto y a la derecha de Pina. ¿Quién está sentado a la derecha de Zory?

### UNMSM

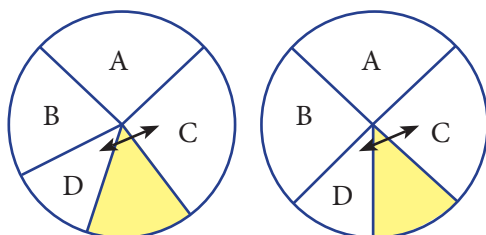
#### Juego lógico verbal 4

Cinco amigos: Ana, Bruno, Celia, Diego y Eva, se sientan alrededor de una mesa circular. Y se sabe lo siguiente:

- Ana se sienta junto a Bruno.
- Diego no se sienta junto a Celia.
- Las cinco sillas se encuentran igualmente espaciadas alrededor de la mesa.

8. ¿Cuántos ordenamientos hay?

Resolución:



∴ Hay 4 ordenamientos.

### Juego lógico verbal 5

Cinco amigos se encuentran sentados en una mesa circular simétricamente distribuidos.

Juan se sienta junto a Beatriz y Ana.

Manuel se sienta a la izquierda de César.

9. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

10. ¿Quién se sienta a dos asientos a la izquierda de Juan?

### Juego lógico verbal 6

En una mesa circular, se sientan cuatro personas: Raúl, Juan, Roberto y Alonso.

Se sabe:

Frente a Raúl está Roberto.

Alonso no está a la derecha de Roberto.

11. ¿Quién está a la izquierda de Raúl?

### UNI

#### Juego lógico verbal 7

Cinco hermanas: Ágata, Rubí, Topacio, Perla y Esmeralda, se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente. Y se sabe lo siguiente:

Ágata se sienta junto a Rubí y frente a Topacio.

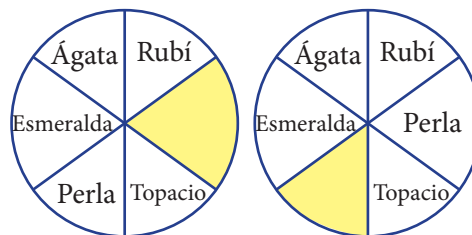
Topacio no es menor que Rubí ni que Perla.

Topacio no es menor que Rubí ni que Perla.

La mayor se sienta junto y a la derecha de Ágata.

12. ¿Quién es la hermana mayor?

Resolución:



∴ Esmeralda

13. ¿Quién es la hermana menor?

14. Si Rubí está frente del asiento vacío, ¿cuántos ordenamientos son posibles?

## Sigo practicando

### Juego lógico verbal 1

En una mesa circular Pedro se sienta junto a Pablo. A la derecha de Pablo está José. Frente a José esta Santiago, a la derecha de Pedro se sienta Lucas, también está Mateo.

16. Frente a Lucas, ¿quién se sienta?

- a) Mateo                                      d) Pablo
- b) Pedro                                        e) José
- c) Santiago

17. ¿Cuántos ordenamientos existen?

- a) 1                                              c) 3                                              e) 5
- b) 2                                              d) 4

18. Es cierto que:

- I. A la derecha de Pablo está Mateo.
- II. Junto a Pedro está Lucas.
- III. A la izquierda de Mateo está Santiago.
- a) Solo I                                        d) Todas
- b) Solo II                                       e) Ninguna
- c) Solo III

19. Es posible que:

- I. Frente a Santiago esté José.
- II. Junto a Pablo está Santiago.
- III. Adyacente a Santiago está Pedro.
- IV. Junto a Pedro está Mateo.
- a) Solo I y II                                      d) Todas
- b) Solo II y III                                   e) Ninguna
- c) Solo III y IV

### Juego lógico verbal 2

Siete amigos A, B, C, D, E, F y G están sentados alrededor de una mesa circular con ocho asientos distribuidos simétricamente. Se cumple que:

- A se sienta frente a B y junto a C.
- E se sienta frente a C y a la derecha de B.
- F no se sienta junto a E ni a A.
- D y G se sientan juntos.

20. Se puede afirmar con certeza que:

- I. A se sienta a la derecha de G.
- II. F se sienta junto al sitio vacío.
- III. B se sienta a la izquierda de D.
- a) Solo I                                        d) Todas
- b) Solo II                                       e) Ninguna
- c) Solo III

21. Si D y E se sientan juntos, ¿cuántos ordenamientos son posibles?

- a) 1                                              c) 3                                              e) 5
- b) 2                                              d) 4

**Juego lógico verbal 3**

6 hermanos: A, B, C, D, E y F se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:

- El único par de mellizos se sienta uno junto a otro.
- El mayor se sienta frente a D.
- A se sienta exactamente frente a B.
- B se sienta a la izquierda inmediata de C.
- El menor se sienta frente a C.
- E no es el mayor y D no es el menor.

22. ¿Quiénes podrían ser los mellizos?

- a) B y C      c) D y F      e) A y C
- b) A y B      d) E y C

23. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente cierta?

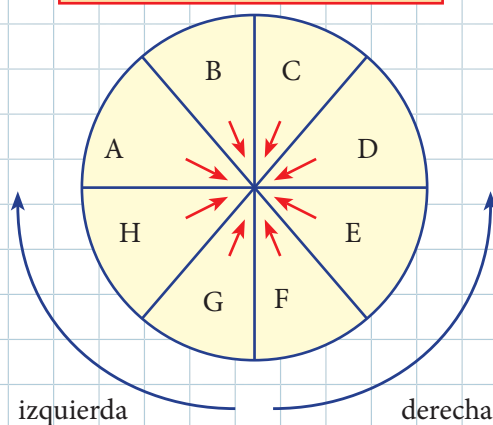
- a) D es el menor.
- b) E es el menor.
- c) B y F se sientan juntos.
- d) C es el mayor.
- e) B se sienta a la derecha de D.

24. Si F se sienta al lado de uno de los mellizos, entonces se deduce con certeza que:

- a) B es mayor que F.
- b) E es mayor que B.
- c) C es uno de los mellizos.
- d) C es menor que A.
- e) B y C son mellizos.

25. Si A se sienta junto a F, entonces ocurre que:

- I. A se sienta junto al menor.
- II. C se sienta junto al mayor.
- III. B es uno de los mellizos.
- a) I y II      d) Todas
- b) II y III      e) Ninguna
- c) I y III

**Esquema formulario**
**Ordenamiento circular**


Todos observan al centro de la mesa

## • Tarea

### Integral

#### Juego lógico verbal 1

En una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente se sientan cinco amigos: Ricardo, Saúl, Tomás, Vanesa y Verónica, se sabe:

- Verónica y Saúl no se sientan juntos.  
Tomás se sienta junto a Ricardo y Verónica.  
Vanesa se sienta frente a Tomás.
- 1. ¿Quién se sienta frente al sitio vacío?  
a) Ricardo                      d) Vanesa  
b) Saúl                          e) Verónica  
c) Tomás
- 2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?  
I. Verónica se sienta frente a Saúl.  
II. Ricardo se sienta a la derecha de Tomás.  
III. Vanesa y Saúl se sientan juntos.  
a) Solo I                      d) I y II  
b) Solo II                      e) I y III  
c) Solo III
- 3. No es una afirmación verdadera:  
a) Vanesa está adyacente al sitio vacío.  
b) Verónica se sienta junto a Vanesa.  
c) Ricardo se sienta a la derecha de Vanesa.

- d) El sitio vacío se encuentra a la derecha de Saúl.
- e) Ricardo y Saúl se sientan juntos.

#### Juego lógico verbal 2

Pablo, Moisés, Sergio, Daniel y Enrique se sientan alrededor de una mesa circular con seis sillas distribuidas simétricamente. Se sabe lo siguiente:

- Pablo se sienta junto a Sergio y a Moisés.  
Sergio está a la derecha de Moisés.  
Daniel no se sienta junto a Enrique.
- 4. ¿Quién se sienta frente a Sergio?  
a) Pablo  
b) Daniel  
c) Enrique  
d) Moisés  
e) No se puede determinar
- 5. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?  
a) 1                                  d) 4  
b) 2                                  e) 5  
c) 3
- 6. ¿Quién se sienta frente a Pablo?  
a) Moisés  
b) Sergio  
c) Daniel  
d) Enrique  
e) Asiento vacío

### PUCP

#### Juego lógico verbal 3

Alberto, Beatriz, Carlos, Doris, Elena y Felipe se sientan simétricamente alrededor de una mesa circular que tiene sillas numeradas del uno al seis en orden consecutivo y la silla de Alberto es la número uno, la de Beatriz es la número dos, etc.

- 7. ¿Qué número de silla está frente a Carlos?  
a) 1                                  d) 5  
b) 2                                  e) 6  
c) 4
- 8. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?  
a) 1                                  d) 4  
b) 2                                  e) 5  
c) 3

### UNMSM

#### Juego lógico verbal 4

Seis amigos: Alberto, Beatriz, Carlos, Doris, Elena y Felipe se sientan simétricamente alrededor de una mesa circular que tiene sillas numeradas en forma consecutiva del uno al seis; además, se sabe lo siguiente:

Alberto se sienta en la silla N° 1 y no está frente a Beatriz.  
Doris se sienta frente a Elena, quien está sentada en la silla N° 3.

Carlos se sienta junto a Alberto y a la derecha de este.  
Beatriz no está junto a Elena.

9. ¿Quién se sienta junto y a la derecha de Felipe?

- a) Alberto      d) Doris  
b) Beatriz      e) Elena  
c) Carlos

10. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

- a) 1                      e) 5  
c) 3                      d) 4  
b) 2

### Juego lógico verbal 5

Cinco amigos: A, B, C, D y E, se sientan alrededor de una mesa circular y ocupan asientos igualmente espaciados. Cuatro de ellos tienen una bebida cada uno: café, té, leche y manzanilla, pero el quinto no.

Se sabe, además, lo siguiente:

A toma leche.

D no está junto a E, ni a C.

B bebe té, y la bebida de C no es leche ni manzanilla.

A está a la izquierda del que bebe café.

C está junto a E.

A y B están junto al que no tiene bebida.

11. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?

- a) 1                      d) 4  
b) 2                      e) 5  
c) 3

12. ¿Quién toma café?

- a) A                      d) D  
b) B                      e) E  
c) C

13. ¿Quién se sienta junto y a la derecha de A?

- a) B  
b) C  
c) D  
d) E  
e) No se puede determinar

## UNI

### Juego lógico verbal 7

Cuatro parejas de esposos se sientan alrededor de una mesa circular con ocho sillas distribuidas simétricamente. Además se cumple que:

Las personas del mismo sexo no se sientan juntas.

Las parejas de esposos se sientan juntas.

Natalia se sienta al lado del esposo de Eliana.

Eliana se sienta junto y a la derecha del esposo de Silvia.

Laura está sentada junto a Miguel y Renzo.

Las ocho personas tienen nombres diferentes.

14. ¿Dónde se sienta Silvia?

- a) Frente a Renzo  
b) Frente a Miguel  
c) Frente a Eliana  
d) A la derecha de su esposo  
e) A la izquierda de Eliana

15. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Renzo se sienta junto a Natalia.

II. Eliana se sienta frente a Laura.

III. El esposo de Silvia no es Miguel.

- a) Solo I  
b) Solo II  
c) Solo I y III  
d) Solo II y III  
e) Todas



# TEST DE DECISIONES

## Capítulo 17

En este tipo de juego lógico se sugiere construir un cuadro con la finalidad de organizar la información proporcionada de esta manera será más fácil obtener la respuesta correcta: Se pueden construir diferentes tipos de cuadros:

### I. TABLA DE DOBLE ENTRADA

Se utiliza sobre todo en los problemas cortos o en los que hay que relacionar a cada persona con un solo rubro (actividad, característica, objetivos, etc.)



|        | Ingeniero | Doctor | Médico |
|--------|-----------|--------|--------|
| Arturo | x         | x      | ✓      |
| Joseph | ✓         | x      | x      |
| Percy  | x         | ✓      | x      |

→ Arturo es médico  
→ Joseph es ingeniero  
→ Percy es doctor



El detalle es que solo las personas pueden realizar una sola actividad, cuando no es del todo cierto.

### II. TABLA CORTA

Se utiliza sobre todo cuando hay que relacionar varios rubros para cada persona, por lo que una tabla de doble entrada resultaría muy grande.

### III. TABLA DE OPCIONES MÚLTIPLES

Se utiliza cuando nos dan opciones para cada persona y se debe trabajar pregunta por pregunta.

### Observación

Cuando el juego tenga dos rubros, se recomienda la tabla de doble entrada; pero, si tiene más de dos rubros, es recomendable el uso de la tabla corta.

## Trabajando en clase

### Integral

#### Juego lógico verbal 1

Julio, Juan y Manuel tienen una mascota cada uno: gato, perro y mono. Si Juan le dice al que tiene un gato que el otro tiene un perro, y Manuel le dice al que tiene perro que debería vacunarlo contra la rabia.

1. ¿Quién tiene el gato?

#### Juego lógico verbal 2

Cuatro deportistas: José, Juan, Julio y Wilfredo practican básquetbol, fútbol, frontón y natación, aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe, además, lo siguiente:

Juan le pide prestadas sus paletas de frontón a Wilfredo.

José quisiera jugar básquetbol en lugar de fútbol. A Julio le da miedo el agua, pues no sabe nadar.

2. ¿Quién practica frontón?

3. ¿Qué afición tiene José?

**Católica**

### Juego lógico verbal 3

Amelia, Beatriz, Carola y Dina tienen una profesión diferente cada una: Ingeniera, arquitecta, profesora y doctora, no necesariamente en ese orden. Además se sabe lo siguiente:

La doctora es vecina de Amelia.

Dina es arquitecta.

Amelia y la ingeniera son amigas de Carola.

4. ¿Quién es la ingeniera?

**Resolución:**

|         | Ingeniera | Arqu. | Prof. | Dra. |
|---------|-----------|-------|-------|------|
| Amelia  | ×         | ×     | ✓     | ×    |
| Beatriz | ✓         | ×     | ×     | ×    |
| Carola  | ×         | ×     | ×     | ✓    |
| Dina    | ×         | ✓     | ×     | ×    |

∴ La ingeniera es Beatriz.

5. ¿Quién es la arquitecta?

### Juego lógico verbal 4

Ariel, Beto, Carlos y Donato tienen diferentes oficios: pintor, gasfitero, mecánico y carpintero; y usan diferentes uniformes: blanco, rojo, azul y naranja. Además, se sabe lo siguiente:

El pintor derrotó a Beto en ajedrez.

Carlos y el mecánico juegan fútbol con el de rojo y con el de azul.

Ariel y el carpintero no se llevan bien con el de azul.

El gasfitero usa uniforme blanco.

6. ¿Qué color de uniforme usa Beto?

7. ¿Qué oficio tiene Ariel y que color de uniforme usa?

8. ¿Quién usa uniforme naranja?

| Nombre | Carlos    | Ariel    | Beto       | Donato |
|--------|-----------|----------|------------|--------|
| Oficio | gasfitero | mecánico | carpintero | pintor |
| Color  | blanco    | naranja  | rojo       | azul   |

∴ Ariel

**UNMSM**

### Juego lógico verbal 4

Héctor, Juan, Gerardo y Pedro tienen, cada uno, un negocio: calzado, textiles, computadoras y relojes. Sus edades son 25, 30, 35 y 45 años, pero no necesariamente en ese orden. Se sabe:

Héctor se dedica a la venta de calzados.

El que vende computadoras es el menor.

Pedro es mayor que Gerardo, pero no tiene 30 años.

Juan es mayor que Gerardo pero menor que Héctor.

9. ¿Qué negocio tiene Gerardo?

10. ¿Quién tiene mayor edad?

11. ¿Quién es el que tiene menos edad?

**UNI**

### Juego lógico verbal 5

Cuatro personas: María, Fabiola, Leticia y Elena, trabajan en una universidad en un mismo turno. Cada una de ellas debe realizar uno de los siguientes trabajos: profesora, jefa de prácticas, bibliotecaria o secretaria, de acuerdo con las siguientes condiciones:

María puede trabajar como profesora, jefa de prácticas o bibliotecaria.

Fabiola puede trabajar como jefa de prácticas o bibliotecaria.

Leticia puede trabajar como jefa de prácticas, profesora o secretaria.

Elena puede trabajar como secretaria o bibliotecaria.

12. Si Elena trabaja como bibliotecaria, ¿quién trabaja como jefa de prácticas?

|         |                   | 12 | 13 | 14 |
|---------|-------------------|----|----|----|
| María   | Profesora         | ✓  |    |    |
|         | Jefa de prácticas | ×  |    |    |
|         | Bibliotecaria     | ×  |    |    |
| Fabiola | Jefa de prácticas | ✓  |    |    |
|         | Bibliotecaria     | ×  |    |    |
| Leticia | Jefa de prácticas | ×  |    |    |
|         | Profesora         | ×  |    |    |
|         | Secretaria        | ✓  |    |    |
| Elena   | Secretaria        | ×  |    |    |
|         | Bibliotecaria     | ✓  |    |    |

13. Si Fabiola es bibliotecaria entonces ¿quién es secretaria?

14. Si Elena es secretaria, ¿qué profesión tendrá María?

## Sigo practicando

### Juego lógico verbal 1

Tres amigas: Ana, Beatriz y Carolina, encuentran después de mucho tiempo y son: enfermera, modelo y periodista, no necesariamente en ese orden:

- Ana cuenta que por su trabajo ha recorrido muchos países.
- La enfermera comenta la mucha envidia que le tiene, ya que ella no puede hacer eso por su trabajo.
- Carolina dice que su trabajo es agotador y tuvo suerte de ir a algunos países cercanos por su trabajo.

**16.** ¿Quién es la enfermera?

- a) Ana
- b) Beatriz
- c) Carolina
- d) Todas
- e) Ninguna

**17.** ¿Quién es la modelo?

- a) Ana
- b) Beatriz
- c) No se puede determinar
- d) Carolina
- e) Ninguna

**18.** Si Ana estuvo en los grandes centros de modelaje, se puede decir que:

- I. Ana es modelo.
- II. Carolina es modelo.
- III. Beatriz es modelo
- a) I y II
- b) I o II
- c) Solo I
- d) Solo II
- e) Solo III

### Juego lógico verbal 2

Tres amigas: Josefina, Diana y Juana, compraron un polo, un pantalón y una blusa aunque no necesariamente en ese orden, en tres establecimientos diferentes: A, B y C. Se sabe que:

- La que compró la blusa lo hizo en B.
- Josefina compró su prenda en C.
- La que compró el polo se llama Diana.

**19.** Josefina compró:

- a) Blusa
- b) Pantalón
- c) No se puede precisar
- d) Polo
- e) Casaca

**20.** La que compró en B se llama:

- a) Josefina
- b) Juana
- c) No se puede precisar
- d) Diana
- e) María

**21.** La que compró el pantalón se llama:

- a) Josefina
- b) Diana
- c) No se puede precisar
- d) Juana
- e) Carla

### Juego lógico verbal 3

Liliana, Soledad, Natalia y Virginia son estrellas de rock, una de ellas toca la guitarra, otra el piano, otra el bajo y otra la batería. Ninguna sabe tocar dos instrumentos. La baterista quiso contratar a su amiga guitarrista para grabar un disco, pero le informaron que esta había salido de gira con la pianista, a quien recién conoció.

Además:

La pianista gana más dinero que la baterista y la guitarrista.

Virginia y Soledad ganan menos dinero que Natalia.

Virginia no conoce a Natalia, pero la que toca el bajo si la conoce.

Liliana siempre toca sola.

22. ¿Qué instrumento toca Natalia?

- a) Piano
- b) Guitarra
- c) No se puede precisar
- d) Bajo
- e) Batería

23. ¿Qué instrumento toca Liliana?

- a) Piano
- b) Guitarra
- c) Bajo
- d) Batería
- e) No se puede precisar

### Juego lógico verbal 4

Arturo, Bruno, Carlos y Dante viven en los siguientes distritos: Ate, Breña, Comas y Lince, pero no necesariamente ese orden. Cada uno tiene solo una mascota: canario, gato, loro o perro. Se sabe:

Arturo no tiene el canario ni vive en Breña.

El dueño del loro vive en Ate.

Carlos tiene al perro.

El dueño del gato vive en Breña y es muy amigo de Dante.

24. ¿Quién tiene al loro?

- a) Arturo
- b) Bruno
- c) Carlos
- d) Dante
- e) No se puede precisar

25. ¿Donde vive Dante?

- a) Ate
- b) Breña
- c) Comas
- d) Lince
- e) No se puede precisar

## Esquema formulario

### Ordenamiento lineal



- Tabla de doble entrada
- Tabla corta
- Tabla de opciones múltiples

## • Tarea

### Integral

#### Juego lógico verbal 1

Reyna, Cecilia, Patty y Emma tienen diferentes ocupaciones. Si se sabe lo siguiente:

Reyna y la oculista visitarán a Emma.

La pediatra atiende a los hijos de Patty y de la pianista.

Reyna es cantante.

Cecilia es amiga de la pianista.

La cantante es familia de Emma.

- ¿Quién es la oculista?  
a) Reyna  
b) Cecilia  
c) Patty  
d) Emma  
e) No se puede precisar
- ¿Cuál es la ocupación de Patty?  
a) Oculista  
b) Pediatra  
c) Pianista  
d) Cantante  
e) No se puede precisar
- La pediatra atiende a los hijos de \_\_\_\_\_.  
a) Emma y Cecilia  
b) Patty y Emma  
c) Patty y Reyna  
d) Emma y Reyna  
e) No se puede precisar

- Podemos afirmar que Emma es familiar de \_\_\_\_\_.  
a) Patty  
b) Reyna  
c) Cecilia  
d) Patty y Reyna  
e) Reyna y Cecilia

#### Juego lógico verbal 2

Cuatro personas: Aldo, Bruno, Ciro y Diana, tienen, cada uno, una nacionalidad diferente: argentina, boliviana, uruguaya y peruana. Además, cada uno tiene un automóvil de diferente marca: W, X, Y y Z, y de diferente color: azul, blanco, amarillo y rojo.

Bruno tiene el automóvil de marca Y.

El peruano tiene el automóvil de color blanco y de marca X.

El automóvil rojo es de marca W.

Diana es boliviana.

Aldo tiene un automóvil de color amarillo.

- ¿Qué marca de auto tiene Aldo?  
a) X  
b) Y  
c) W  
d) Z  
e) No se puede determinar
- ¿Qué nacionalidad tiene Bruno?  
a) Argentina  
b) Boliviana

- Peruana
- Uruguaya
- No se puede determinar

- El automóvil de marca Y es de color:  
a) Azul  
b) Blanco  
c) Celeste  
d) Rojo  
e) No se puede determinar

### PUCP

#### 8. Juego lógico verbal 3

Carlos, Víctor y José estudian en tres universidades X, Y y Z. Además, cada uno de ellos estudia una carrera diferente: A, B o C. Carlos no está en X y José no está en Y. El que está en Y estudia B, y el que está en X no estudia A, y José no estudia C. ¿Qué estudia Víctor y dónde?

- C en Y
- C en X
- B en Z
- A en Z
- B en X

### UNMSM

#### 9. Juego lógico verbal 4

Ubaldo, Nicolás e Ignacio postulan a la UNI a canales diferentes (II, III o V); ellos culminan su secundaria en los colegios: Francisco Bolognesi, Guadalupe o Humbolt.

Además, se sabe:

- Ignacio no postula al canal III.
- Ubaldo no postula al canal II.
- El egresado del colegio Francisco Bolognesi no postula al canal II.
- Ignacio no es egresado del Humboldt.
- El egresado del colegio Guadalupe postula al canal III.

¿De qué colegio egresó Nicolás y a qué canal postula?

- Guadalupe, canal III
- Humboldt, canal II
- Bolognesi, canal II
- Humboldt, canal III
- Guadalupe, canal II

10. Del enunciado anterior, ¿de qué colegio egresó Ubaldo?

- Guadalupe
- Humboldt
- Bolognesi
- Bolívar
- No se puede determinar

## UNI

### Juego lógico verbal 5

Cinco estudiantes: César, Cristiano, Óscar, Roberto y Sergio, realizan juntos varias carreras. El orden en que llegaron siempre cumple con las siguientes condiciones:

César termina primero o segundo.

Cristiano termina segundo, tercero o cuarto,

Óscar termina tercero o cuarto.

Roberto termina cuarto o quinto.

Sergio termina primero o quinto.

11. Si Sergio terminó último en una determinada carrera, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, con respecto a dicha carrera?

- César llegó primero.
- Cristiano llegó segundo.
- Óscar llegó tercero.
- Roberto llegó cuarto.

- Solo I y II
- Solo II y IV
- Solo I, II y III
- Solo I, II y IV
- Todas

12. Si Sergio no terminó último, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- César llegó primero.
- Cristiano llegó segundo.
- Óscar llegó cuarto.

- Solo I
- Solo II
- Solo III
- Ninguna
- Todas

13. Si Óscar terminó cuarto, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- César llegó primero.
- Cristiano llegó segundo.
- Roberto llegó último.

- Solo I
- Solo II
- Solo III
- Solo I y III
- Solo II y III

14. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- Si César termina segundo Cristiano termina tercero.
- Si Roberto termina último, Sergio termina primero.
- Si César termina segundo, Óscar termina cuarto.
- Si Óscar termina tercero, Roberto llega cuarto.
- Si Óscar termina tercero, César llega segundo.

15. Si Cristiano no termina tercero, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- César llega primero.
- Óscar llega tercero.
- Roberto llega cuarto.
- Sergio llega último.
- Cristiano llega primero.



# OPERACIONES MATEMÁTICAS

## Capítulo 18

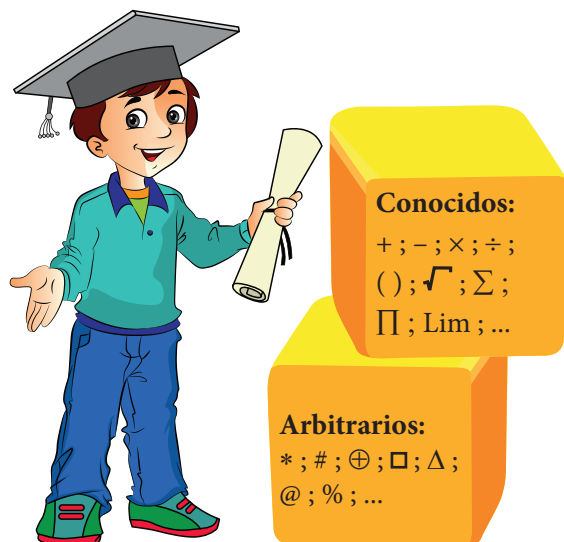
### I. GENERALIDADES

El objetivo fundamental de los operadores matemáticos es desarrollar capacidad de interpretación frente a relaciones nuevas con las que no estás familiarizado.

#### A. Operador matemático

Es un símbolo gráfico cuya elección no está restringida y que permite establecer una determinada operación.

Los símbolos gráficos que usaremos para representar operadores, será:



Ejemplo de operaciones arbitrarias:

$$m \otimes n = m^n + 6m + 5n$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 Operador              Regla de  
 matemático          definición

Calcula:  $3 \otimes 2$

$$m \otimes n = m^n + 6m + 5n$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \otimes 2 = 3^2 + 6(3) + 5(2) = 37$$

### B. Operadores simples y compuestos

De acuerdo a la estructura que se presenta en los ejercicios, hablaremos de operadores simples y compuestos.

#### 1. Operadores simples

Cuando en una operación o conjunto de operaciones interviene un solo operador, se le denomina operador simple.

Ejemplo:

$$a \# b = 2a - b$$

Calcular:  $3 \# 4$

$$2(3) - 4 = 2$$

#### 2. Operadores compuestos

Las diversas formas de combinación de dos o más operadores simples se denominan operadores compuestos.

Ejemplos:

$$x \# y = \frac{2x - y}{2}; x \% y = \frac{x + y}{2}$$

$$R = \underbrace{(4 \# 6)}_1 \% \underbrace{(6 \# 2)}_5 = \frac{\frac{2(4) - 6}{2}}{5} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

### C. Tabla de doble entrada

En lugar de una fórmula para hallar un resultado, la operación binaria puede presentar estos resultados.

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | a | b |

Calcular:

$$\underbrace{(a * b)}_b * c$$

$$\underbrace{b * c}_a$$

# Trabajando en clase

## Integral

1. Si:  $a \Delta b = a^2 + 2ab$   
Calcular  $3 \Delta 2 + 2 \Delta 3$

2. Si:  
$$x \Delta y = \begin{cases} x + y; & x \leq y \\ x - y; & x > y \end{cases}$$
  
Calcular  $(2 \Delta 1) \Delta (4 \Delta 3)$

3. Si:  $\sqrt{m} \Delta n^2 = m^2 + \sqrt{n}$   
Calcula  $(1 \Delta 4) \Delta 16$

## Católica

4. Si:  $\boxed{x+1} = x^2 - 1$   
Calcular el valor de  $\boxed{n} = 80$

Resolución:

$$\boxed{x+1} = (x+1)(x-1)$$

$$x+1 = m$$

$$\boxed{m} = m(m-2)$$

$$\boxed{n} = 80 = 10 \times 8$$

$$\boxed{m} = 8 = 4 \times 2 = n(n-2)$$

$$n = 4$$

5. Se define  $\boxed{m} = x(x-1) \forall x \in \mathbb{Z}^+$   
Determina el valor de «a» en  $\boxed{a-9} = 380$

6. Si  $\Delta$  es un operador tal que  $a \Delta b = a^2 - a - 1$ .  
Calcula  $S = 3 \Delta (3 \Delta (3 \Delta (3 \Delta \dots)))$

7. Si:  $\boxed{3x+1} = 2x - 5$   
Calcula  $\boxed{10} + \boxed{25}$

## UNMSM

8. Si:  $x \Delta y = x - y + 5$   
Calcular «a» en:  $a \Delta 1 = 1 \Delta a$

Resolución:

$$a \Delta 1 = 1 \Delta a$$

$$a - 1 + 5 = 1 - a + 5$$

$$2a = 2$$

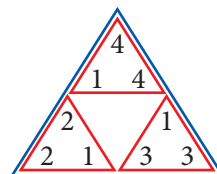
$$a = 1$$

9. Si:  $m \% n = m - 2n + 6$   
Calcula «x» en:  
 $x \% 2 = 2 \% x$

10. Si: 
$$\Delta \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & c & a \\ c & c & a & b \end{array}$$

Calcula:  $[a \Delta b] \Delta [c \Delta a] \Delta b] \Delta a$

11. Sea:  $\triangle \begin{array}{c} a \\ b \quad c \end{array} = a^2 - bc$   
Calcula:



## UNI

12. Si:  $\odot x = x^2 + 2$   
 $\triangle x = 4x + 2; \triangle x > 0$

Calcular  $\triangle \triangle \triangle x \dots 1000 \text{ operadores}$

Resolución:

$$\triangle x = 4x + 2$$

$$\triangle x^2 + 2 = 4x + 2$$

$$\triangle x^2 = 4x$$

$$\triangle 4 = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$$

$$\triangle 4 = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$$

$\vdots$

$\triangle \triangle \triangle 4 \dots 1000 \text{ operadores} = 4$

13. Si:  $\odot x = 3x + 6$

$$\odot x = 3x - 6$$

Calcula  $\odot 10$

14. Si  $\boxed{m} = (m+1)^2; m \in \mathbb{R}^+$   
Determina «x» en  $\boxed{\boxed{x}} = 100$

# Sigo practicando

16. Si:  $a \# b = 2a - b$

Determina  $E = (4 \# 3) \# (2 \# 1)$

- a) 5                      c) 2                      e) 7  
b) 3                      d) 8

17. Si:  $\boxed{n} = \begin{cases} (n-1)^2; < n > \text{ es par} \\ 2n; < n > \text{ es impar} \end{cases}$

Determina:  $L = \boxed{3} \times \boxed{2} - \boxed{2}$

- a) 10                      c) 30                      e) 50  
b) 20                      d) 40

18. Si:  ${}^3\int_m \Delta n^2 = m + n$

Calcular:  $1 \Delta 9$

- a) 1                      c) 3                      e) 5  
b) 2                      d) 4

19. Si se cumple:

$$\textcircled{x} n = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n \text{ y}$$

$$\textcircled{x} (\textcircled{x} n) = 420$$

Determina «n».

- a) 1                      c) 3                      e) 5  
b) 2                      d) 4

20. Si:  $\frac{a}{b} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2a}$

Calcula:  $\frac{2000}{4}$

- a) 8                      c) 12                      e) 15  
b) 10                      d) 11

21. Si:  $\triangle_{x+3} = x^2 + 4$ , calcula:  $\triangle_5 + \triangle_6 + \triangle_7$

- a) 37                      c) 50                      e) 45  
b) 41                      d) 38

22. Si  $\boxed{a} \boxed{b} = a^3 + 3ab + 3ab^2 + b^3$ .

Calcula:  $\boxed{2} \boxed{2}$ .

- a) 64                      c) 70                      e) 27  
b) 36                      d) 125

23. Si:

| $\Delta$ | a | b | c | d |
|----------|---|---|---|---|
| a        | a | b | c | d |
| b        | b | c | d | a |
| c        | c | d | a | b |
| d        | d | a | b | c |

Calcula:  $((a \Delta b) \Delta c) \Delta d) \Delta a$

- a) a  
b) b  
c) c  
d) d  
e) No se puede

24. Sea:  $\triangle_{abc} = ab + bc + ac$

Calcula el valor de:  $\triangle_{1xx} = 8$

- a) 2  
b) -4  
c) -2  
d) 4  
e)  $20^{-4}$

25. Si  $\odot x = 3x - 1$ ;

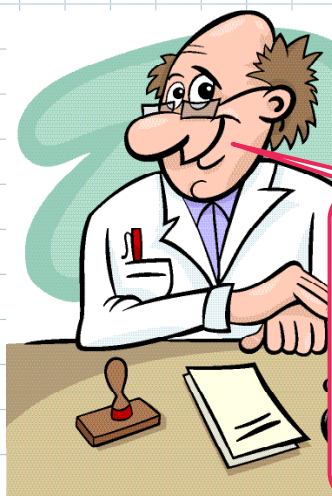
$\triangle m = 2m + 1$

Calcula  $A^2$  en:  $A =$



- a) 4225  
b) 35  
c) 65  
d) 60  
e) 70

## Esquema formulario



Operaciones matemáticas

Operación matemática

Operador matemático

Operador universal  
Operador arbitrario

# Tarea

## Integral

- Si:  $x \Delta y = x^3 + xy$   
Calcula:  $1 \Delta 2 + 2 \Delta 1$   
a) 10 d) 11  
b) 13 e) 14  
c) 15
- Si  $m \% n = \begin{cases} m^2 + n^2; m < n \\ m^2 - n^2; m > n \end{cases}$   
Calcula:  $(2 \Delta 1) \Delta (3 \Delta 2)$   
a) 34 d) 45  
b) 31 e) 49  
c) 36
- Si:  $m^3 \% (2n) = m + n^2$   
Calcula:  $8 \% 4$   
a) 6 d) 13  
b) 8 e) 15  
c) 16
- Si:  $\boxed{n+1} = n^3 - n$ .  
Calcula el valor de «m» en:  
 $\boxed{m} = 336$   
a) 3 d) 16  
b) 2 e) 6  
c) 1

## PUCP

- Si  $x @ y = (x + y)^2 - (x^2 + 2xy)$   
Calcula:  
 $((100 @ 99) @ 98) \dots @ 3 @ 2 @ 1$   
a) 1 d) 4  
b) 2 e) 5  
c) 3

- Si:  
 $\boxed{\frac{x}{2} - 1} = 3x + 10$   
Calcula:  $\boxed{10} + \boxed{6}$   
a) 130 d) 128  
b) 120 e) 115  
c) 131

- Si  $a \bigcirc b = a - b + 6$   
Calcular m en:  
 $m \bigcirc 5 = 5 \bigcirc m$   
a) 4 d) 5  
b) 3 e) 1  
c) 2

- Si: 

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| % | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 1 | 2 | 3 |

  
Calcula:  
 $[(1 \% 2) \% (3 \% 4)] \% 3$   
a) 2 d) 3  
b) 4 e) 1  
c) 5

## UNMSM

- Si:  $\int_b^a = \frac{a+b}{a-b}$   
Calcula:  $\int_7^{10} + \int_3^7 + \int_1^3$   
a)  $\frac{14}{3}$  d)  $\frac{19}{5}$   
b)  $\frac{31}{3}$  e)  $\frac{29}{5}$   
c)  $\frac{29}{3}$

- Si:  $\triangle x = x + 4$ ;  
 $\boxed{x+3} = x - 1$ ;  
 $\bigcirc x = x + 8$

Determina el valor de:  $\bigcirc \triangle 5$

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

- Si:  $\boxed{x} = (x-1)^2$ , determina P en:  $\boxed{\boxed{n}} = 64$ ; si  $\in \mathbb{Z}^+$   
a) 1 d) 4  
b) 2 e) 5  
c) 3

- Si:  $\boxed{x-2} = x(x-2)$   
Determina:  $\boxed{x-1}$   
a)  $x-1$  d)  $x^4-1$   
b)  $x^2-1$  e)  $x$   
c)  $x^3-1$

- Si:  $\triangle x+1 = x^2 - 1$ , entonces el valor de:

$$\frac{\triangle 1 - \triangle 0}{\triangle -1} \text{ es igual a:}$$

- $-\frac{1}{5}$
- $-\frac{1}{7}$
- $-\frac{1}{9}$
- $-\frac{1}{11}$
- $-\frac{1}{3}$

14. Sabiendo que:

$$a \# b = \frac{a + b + 5}{2}$$

Halla:  $x \# 5$

- a) 10
- b) 8
- c) 20
- d) 25
- e) 15

15. Si:  $\boxed{\boxed{x}} = 64x + 105$

Calcula:  $\boxed{8}$

- a) 35
- b) 36
- c) 37
- d) 38
- e) 39







# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

## Capítulo 13

Son aquellas igualdades entre las razones trigonométricas de una cierta variable angular, las cuales se verifican para todo valor de la variable que no presente indeterminación en una o más razones trigonométricas existentes en la igualdad.

Se clasifican en:

### I. IDENTIDADES PITAGÓRICAS

1.  $\boxed{\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1}$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} \text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x \\ \text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x \end{cases}$
2.  $\boxed{\text{Tg}^2x + 1 = \text{Sec}^2x}$ ;  $\forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$   $\begin{cases} \text{Sec}^2x - \text{Tg}^2x = 1 \\ \text{Tg}^2x = \text{Sec}^2x - 1 \end{cases}$
3.  $\boxed{\text{Ctg}^2x + 1 = \text{Csc}^2x}$ ;  $\forall x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$   $\begin{cases} \text{Csc}^2x - \text{Ctg}^2x = 1 \\ \text{Ctg}^2x = \text{Csc}^2x - 1 \end{cases}$

### II. IDENTIDADES RECÍPROCAS

1.  $\boxed{\text{Sen}x \cdot \text{Csc}x = 1}$ ;  $\forall x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Csc}x = \frac{1}{\text{Sen}x}$
2.  $\boxed{\text{Cos}x \cdot \text{Sec}x = 1}$ ;  $\forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Sec}x = \frac{1}{\text{Cos}x}$
3.  $\boxed{\text{Tan}x \cdot \text{Cot}x = 1}$ ;  $\forall x \neq n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Ctg}x = \frac{1}{\text{Tgx}}$

### III. IDENTIDADES POR DIVISIÓN

1.  $\boxed{\text{Tan}x = \frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x}}$ ;  $\forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
2.  $\boxed{\text{Cot}x = \frac{\text{Cos}x}{\text{Sen}x}}$ ;  $\forall x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Reduce:  
 $L = \text{Tan}x \cdot \text{Cos}x + \text{Sen}^2x \cdot \text{Csc}x$

2. Reduce:  
 $P = (\text{Tan}x + \text{Cot}x) \text{Sen}x$

3. Reduce:  
 $N = \text{Tan}x \cdot \text{Sen}x + \text{Cos}x$

### PUCP

4. Reduce:  
 $M = \left( \frac{1 - \text{Sen}^2x}{1 - \text{Cos}^2x} + 1 \right) \text{Tan}^2x$

#### Resolución

$$M = \left( \frac{1 - \text{Sen}^2x}{1 - \text{Cos}^2x} + 1 \right) \text{Tan}^2x$$

$$M = \left( \frac{\text{Cos}^2x}{\text{Sen}^2x} + 1 \right) \text{Tan}^2x$$

$$M = (\text{Cot}^2x + 1) \text{Tan}^2x$$

$$M = 1 + \text{Tan}^2x \Rightarrow M = \text{Sec}^2x$$

5. Reduce:  
 $P = \left( \frac{1 - \text{Cos}^2x}{1 - \text{Sen}^2x} + 1 \right) \text{Cot}^2x$

6. Simplifica  
 $J = \frac{\text{Sen}x - \text{Sen}^3x}{\text{Cos}x - \text{Cos}^3x}$

7. Simplifica  
 $C = \frac{\text{Sec}^4x - 1}{\text{Tan}^2x} - 1$

### UNMSM

8. Elimina "x" si:  $\text{Csc}x = m$  y  $\text{Tan}x = n$

#### Resolución

$$\text{Csc}x = m$$

$$\text{Tan}x = n \Rightarrow \text{Cot}x = \frac{1}{n}$$

Sabemos:

$$\text{Csc}^2x - \text{Cot}^2x = 1$$

$$(m)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} m^2 - \frac{1}{n^2} &= 1 & \Rightarrow \frac{m^2 n^2 - 1}{n^2} &= 1 \\ m^2 n^2 - 1 &= n^2 & \Rightarrow m^2 n^2 - n^2 &= 1 \\ n^2(m^2 - 1) &= 1 \end{aligned}$$

9. Elimina "x" si  $\text{Sec}x = a$  y  $\text{Cot}x = b$

10. Expresa "E" en términos de  $\text{Cot}x$   
 $E = \frac{\text{Sen}x}{\text{Tan}x} + \frac{\text{Tan}x}{\text{Csc}x}$

11. Si:  $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = 3$

Calcula:

$$E = (\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^4 + (\text{Sen}\theta - \text{Cos}\theta)^4 + 1,1$$

### UNI

12. Calcula a + b para que se cumpla la igualdad mostrada

$$\sqrt{\frac{1 - \text{Sen}x}{1 + \text{Sen}x}} = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

#### Resolución

$$\sqrt{\frac{1 - \text{Sen}x}{1 + \text{Sen}x}} = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \text{Sen}x)(1 - \text{Sen}x)}{(1 + \text{Sen}x)(1 - \text{Sen}x)}} = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \text{Sen}x)^2}{1 - \text{Sen}^2x}} = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \text{Sen}x)^2}{\text{Cos}^2x}} = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

$$\frac{1 - \text{Sen}x}{\text{Cos}x} = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

$$\frac{1}{\text{Cos}x} - \frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x} = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

$$\text{Sec}x - \text{Tan}x = a \text{Sec}x + b \text{Tan}x$$

$$\Rightarrow a = 1 \wedge b = -1$$

$$\text{Piden: } a + b = 0$$

13. Calcula a - b para que se cumpla:

$$\sqrt{\frac{1 + \text{Sen}x}{1 - \text{Sen}x}} = a \text{Sec}x - b \text{Tan}x$$

14. Simplifica:

$$\frac{\text{Tan}^5\theta + \text{Tan}\theta + 1}{\text{Tan}\theta + \text{Sec}^2\theta} + \text{Sec}^2\theta - \text{Tan}^3\theta$$

SIGO PRACTICANDO

16. Reduce:

$$E = \text{Sen}x \cdot \text{Csc}x + \text{Tan}x \text{Cot}x$$

- |         |         |
|---------|---------|
| a) -1   | b) 0    |
| c) 2    | d) Tanx |
| e) Cotx |         |

17. Reduce:

$$T = (\text{Cot}x + \text{Tan}x)\text{Cos}x$$

- |         |         |
|---------|---------|
| a) Cosx | b) Cscx |
| c) Senx | d) Tanx |
| e) Cotx |         |

18. Reduce:

$$M = (\text{Cos}x + \text{Sen}x)^2 - 1$$

- |             |              |
|-------------|--------------|
| a) SenxCosx | b) 2SenxCosx |
| c) Senx     | d) Cosx      |
| e) 1        |              |

19. Simplifica:

$$E = \text{Tan}x + \frac{1}{\text{Sec}x + \text{Tan}x}$$

- |         |                       |
|---------|-----------------------|
| a) Senx | b) Secx               |
| c) 1    | d) Sec <sup>2</sup> x |
| e) -1   |                       |

20. Simplifica:

$$M = \frac{\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x}{1 + \text{Tan}^2x}$$

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| a) Cosx               | b) Cos <sup>2</sup> x |
| c) Secx               | d) Sec <sup>2</sup> x |
| e) Tan <sup>2</sup> x |                       |

21. Simplifica:

$$Q = \frac{\text{Csc}^4\theta - 1}{\text{Cot}^2\theta} - \text{Csc}^2\theta$$

- |         |         |
|---------|---------|
| a) 0    | b) 1    |
| c) -1   | d) Senθ |
| e) Cosθ |         |

22. Si:  $\text{Sen}x + \text{Cos}x = \frac{1}{3}$ , calcula  $z = \text{Sen}x \cdot \text{Cos}x$

- a)  $-5/7$       b)  $-4/7$       c)  $-4/9$   
d)  $-3/7$       e)  $-1/7$

23. Simplifica:

$$K = (\text{Sec}x - \text{Tan}x)(1 + \text{Sen}x)$$

- a) 1      b)  $\text{Cos}^2x$       c)  $\text{Cos}x$   
d)  $\text{Sen}^2x$       e)  $\text{Sen}x$

## ESQUEMA FORMULARIO

### I. Identidades pitagóricas

- $\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} \text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x \\ \text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x \end{cases}$
- $\text{Tan}^2x + 1 = \text{Sec}^2x$ ;  $\forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$   $\begin{cases} \text{Sec}^2x - \text{Tg}^2x = 1 \\ \text{Tg}^2x = \text{Sec}^2x - 1 \end{cases}$
- $\text{Cot}^2x + 1 = \text{Csc}^2x$ ;  $\forall x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$   $\begin{cases} \text{Csc}^2x - \text{Ctg}^2x = 1 \\ \text{Ctg}^2x = \text{Csc}^2x - 1 \end{cases}$

### II. Identidades recíprocas

- $\text{Sen}x \cdot \text{Csc}x = 1$ ;  $\forall x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Csc}x = \frac{1}{\text{Sen}x}$
- $\text{Cos}x \cdot \text{Sec}x = 1$ ;  $\forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Sec}x = \frac{1}{\text{Cos}x}$
- $\text{Tan}x \cdot \text{Cot}x = 1$ ;  $\forall x \neq n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Ctg}x = \frac{1}{\text{Tgx}}$

### III. Identidades por división

- $\text{Tan}x = \frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x}$ ;  $\forall x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
- $\text{Cot}x = \frac{\text{Cos}x}{\text{Sen}x}$ ;  $\forall x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

## • Tarea

### Integral

- Reduce;  
 $T = \text{Cot}x \cdot \text{Sec}x + \text{Sen}x \cdot \text{Csc}^2x$   
 a)  $2\text{Csc}x$   
 b)  $\text{Csc}x$   
 c)  $\text{Sen}x$   
 d)  $-\text{Sen}x$   
 e) 1
- Reduce:  
 $S = \frac{\text{Cos}x}{1 + \text{Sen}x} + \text{Tan}x$   
 a)  $\text{Sen}x$   
 b)  $\text{Sec}x$   
 c)  $\text{Csc}x$   
 d)  $\text{Tan}x$   
 e)  $\text{Cot}x$
- Reduce:  
 $E = \frac{\text{Cot}x}{\text{Tan}x} + (\text{Sec}^2x - \text{Tan}^2x)$   
 a)  $\text{Sen}x$   
 b)  $\text{Csc}x$   
 c)  $\text{Csc}^2x$   
 d) 2  
 e)  $\text{Cot}x$
- Simplifica:  
 $R = (1 + \text{Cos}x)(\text{Csc}x - \text{Cot}x)$   
 a)  $\text{Cos}x$   
 b)  $\text{Cos}^2x$   
 c)  $\text{Sen}x$   
 d)  $\text{Sen}^2x$   
 e)  $\text{Csc}x$

### PUCP

- Simplifica:  
 $L = \frac{\text{Cos}x - \text{Cos}^3x}{\text{Sen}x - \text{Sen}^3x}$   
 a)  $\text{Tan}x$   
 b)  $\text{Cot}x$   
 c)  $\text{Sen}x$   
 d)  $\text{Cos}x$   
 e)  $\text{Sec}x$
- Simplifica:  
 $Q = \frac{\text{Csc}^4x - 1}{\text{Cos}^2x} - 1$   
 a)  $\text{Sen}^2x$   
 b)  $\text{Cos}^2x$   
 c)  $\text{Sec}^2x$   
 d)  $\text{Csc}^2x$   
 e)  $\text{Tan}^2x$
- Reduce:  
 $R = \text{Cot}x \cdot \text{Cos}x + \text{Sen}x$   
 a)  $\text{Csc}x$   
 b)  $\text{Sec}x$   
 c) 1  
 d)  $\text{Sen}x$   
 e)  $\text{Cos}x$
- Reduce:  
 $A = \left( \text{Csc}x + \frac{1}{\text{Tan}x} \right) \left( \frac{1}{\text{Sen}x} - \text{Cot}x \right)$   
 a)  $\text{Sec}x$   
 b)  $\text{Cot}x$   
 c) 2  
 d)  $\text{Csc}x$   
 e) 1

### UNMSM

- Expresa a en términos de  $\text{Tan}x$   
 $A = (1 + \text{Sen}x)(1 - \text{Sen}x)$   
 a)  $2\text{Tan}^2x - 1$   
 b)  $2\text{Tan}^3x + 1$   
 c)  $\frac{1}{1 + \text{Tan}^2x}$   
 d)  $\frac{2}{1 + \text{Tan}^{2x}}$   
 e)  $\text{Tan}^2x$
- Si:  $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = 4$   
 Calcula  $E = (\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2$   
 a) 1  
 b)  $1/2$   
 c)  $3/2$   
 d) 2  
 e) 3
- Reduce:  
 $R = (\text{Sen}x + \text{Cos}x)^2 - (\text{Sen}x - \text{Cos}x)^2$   
 a) 2  
 b)  $2\text{Cot}x$   
 c)  $2\text{Sen}x$   
 d)  $4\text{Sen}x\text{Cos}x$   
 e) 0
- Simplifica:  
 $L = \frac{1 + \text{Tan}\theta}{\text{Sec}\theta + \text{Csc}\theta}$   
 a)  $\text{Sec}\theta$   
 b)  $\text{Sen}\theta$   
 c)  $\text{Cot}\theta$   
 d)  $\text{Csc}\theta$   
 e)  $\text{Cos}\theta$

UNI

13. Calcula a + b, si:

$$\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = a \csc x + b \cot x$$

- a) 0                      b) -1  
c) 1                      d) 2  
e) -2

14. Simplifica:

$$\frac{\cot^5 x + \cot x + 1}{\cot x + \csc^2 x} + \csc^2 x - \cot^3 x$$

- a) 0                      b) 1  
c) 2                      d)  $\tan 5x$   
e)  $\cot 5x$

15. Si  $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ , calcula:

$$K = \sqrt{\sec^4 x - \cot^2 x}$$

- a) 2  
b) 0  
c)  $\sqrt{2}$   
d) 1  
e)  $\sqrt{3}$



# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

## Capítulo 14

Son aquellas relaciones o expresiones que por el uso frecuente se han hecho conocidas, algunas de estas son:

1.  $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$
2.  $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$
3.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
4.  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$
5.  $(1 \pm \sin x \pm \cos x)^2 = 2(1 \pm \sin x)(1 \pm \cos x)$

### Trabajando en clase

#### Integral

1. Reduce:  
 $E = (\sec x \cdot \csc x - \tan x) \cdot \sin x$
2. Reduce:  
 $Q = (\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
3. Reduce:  
 $L = (\tan x + \cot x) \cdot \cos^2 x$

#### PUCP

4. Si:  $A = 9(\sin^4 x + \cos^4 x)$   
 $B = 6(\sin^6 x + \cos^6 x)$   
Además:  $A - B = n$   
Halla el valor de  $n^2 + 9$   
**Resolución**  
 $A = 9(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = 9 - 18\sin^2 x \cdot \cos^2 x$   
 $B = 6(1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = 6 - 18\sin^2 x \cdot \cos^2 x$   
Dato:  $A - B = n$   
 $(9 - 18\sin^2 x \cdot \cos^2 x) - (6 - 18\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = n$   
 $3 = n$   
Piden:  
 $n^2 + 9 = 18$
5. Reduce:  
 $T = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4$

6. Simplifica:

$$Q = \frac{(1 - \sin x - \cos x)^2}{2(1 - \sin x)} + \cos x$$

7. Simplificar:

$$E = \frac{(\sec^2 x + \csc^2 x)}{\tan x + \cot x} \cdot \cos x$$

#### UNMSM

8. Si:  $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$   
Calcula:  $H = \sin^4 x + \cos^4 x$   
**Resolución**

$$\text{Dato: } \sin x + \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{3}$$

$$1 + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{3}$$

$$2\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Piden: } H = \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$H = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$H = 1 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$H = 1 - 2\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{17}{18}$$

9. Si:  $\text{Sen}x + \text{Cos}x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Calcula:  $N = \text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x$

10. Si  $\text{Sen}x + \text{Cos}x = n$

Determina:  $M = (1 + \text{Sen}x)(1 + \text{Cos}x)$

11. Si  $\text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x = 81$  ( $x$ : agudo)

Calcula:  $M = \sqrt{(\text{Tan}x + \text{Cot}x)^3}$

### UNI

12. Si  $\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = \frac{1}{4}$

Calcula  $N = \text{Sen}^2x \cdot \text{Tan}x + \text{Cos}^2x \cdot \text{Cot}x$

#### Resolución

$$N = \text{Sen}^2x \cdot \frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x} + \text{Cos}^2x \cdot \frac{\text{Cos}x}{\text{Sen}x}$$

$$N = \frac{\text{Sen}^3x}{\text{Cos}x} + \frac{\text{Cos}^3x}{\text{Sen}x}$$

$$N = \frac{\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x}{\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x}$$

$$N = \frac{1 - 2\text{Sen}^2x \cdot \text{Cos}^2x}{\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x}$$

$$N = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{7}{2}$$

13. Si  $\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = \frac{1}{3}$

Calcula  $L = \text{Sen}^4x \cdot \text{Tan}x + \text{Cos}^4x \cdot \text{Cot}x$

14. Simplifica:

$$E = \sqrt{\frac{2(1 - \text{Sen}x)}{1 - \text{Cos}x}} + \frac{\text{Sen}x}{1 - \text{Cos}x}$$

( $x \in \text{IVC}$ )

## ESQUEMA FORMULARIO

### Identidades Trigonométricas Auxiliares

$$\text{Tan}x + \text{Cot}x = \text{Sec} \cdot \text{Csc}x = \frac{1}{\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x}$$

$$\text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x = \text{Sec}^2x \cdot \text{Csc}^2x$$

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = 1 - 2\text{Sen}^2x \cdot \text{Cos}^2x$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - 3\text{Sen}^2x \cdot \text{Cos}^2x$$

$$(1 \pm \text{Sen}x \pm \text{Cos}x)^2 = 2(1 \pm \text{Sen}x)(1 \pm \text{Cos}x)$$

SIGO PRACTICANDO

16. Reduce:

$$P = (\sec x \cdot \csc x - \cot x) \cdot \cot x$$

- a) 1                      b)  $\tan^2 x$   
 c)  $\cot^2 x$               d)  $\sin x$   
 e)  $\cos x$

17. Reduce:

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

- a) 3                      b) 2  
 c) 1                      d)  $\sin^2 x$   
 e)  $\cos^2 x$

18. Reduce:

$$L = (\tan x + \cot x) \sin x \cdot \cos x$$

- a)  $\sin^2 x$                       b)  $\cos^2 x$   
 c)  $\tan^2 x$                       d)  $\cot^2 x$   
 e) 1

19. Simplifica:

$$M = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$$

- a) 1                      b) -1                      c) 1/2  
 d) -1/2                      e) -2

20. Simplifica:

$$I = \frac{(1 + \sin x + \cos x)^2}{2(1 + \cos x)} - 1$$

- a)  $\sin x$                       b)  $\cos x$   
 c)  $1 + \sin x$                       d)  $-\sin x$   
 e)  $-\cos x$

21. Simplifica:

$$Q = \left( \frac{\sec^2 x + \csc^2 x}{\tan x + \cot x} \right) - \tan x$$

- a) 1                      b)  $\sin x$   
 c)  $\cos x$                       d)  $\tan x$   
 e)  $\cot x$

22. Indica el valor de “x” si:

$$(\text{Sen}x + \text{Cos}x)^2 - 1 = 2\text{Cos}^2x$$

(x: agudo)

- a)  $30^\circ$       b)  $60^\circ$       c)  $45^\circ$   
d)  $37^\circ$       e)  $53^\circ$

23. Si:  $\text{Sen}x + \text{Cos}x = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Calcula:  $\text{Tan}x + \text{Cot}x$

- a) 2                      b) 3  
c) 6                      d)  $2\sqrt{3}$   
e)  $\sqrt{6}$

24. Si:  $\text{Sen}x + \text{Cos}x = \frac{1}{5}$

Calcula:  $N = (1 - \text{Sen}x)(1 - \text{Cos}x)$

- a)  $8/25$                   b)  $8/17$   
c)  $4/25$                   d)  $13/25$   
e) 2

25. Si:  $\text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x = 100$

(x: agudo)

Calcula:  $N = \text{Tan}x + \text{Cot}x$

- a) 1                                  b) 5  
c) 10                                d)  $5\sqrt{3}$   
e)  $10\sqrt{3}$

## • Tarea

### Integral

#### 1. Reduce:

$$Q = (\sec x \cdot \csc x - \cot x) \cos x$$

- a)  $\sin x$
- b)  $\cos x$
- c)  $\tan x$
- d)  $\cot x$
- e)  $\sec x$

#### 2. Reduce:

$$L = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 - 1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

- a) 1
- b) -2
- c) -4
- d)  $1/2$
- e) 3

#### 3. Reduce:

$$L = (\tan x + \cot x) \sin^2 x$$

- a)  $\sin x$
- b)  $\cos x$
- c)  $\tan x$
- d)  $\cot x$
- e)  $\sec x$

#### 4. Reduce:

$$I = \sec^2 x \cdot \csc^2 x - \sec^2 x$$

- a) 1
- b) 0
- c) 2
- d)  $\sec^2 x$
- e)  $\csc^2 x$

### PUCP

#### 5. Simplifica:

$$T = \frac{(1 - \sin x + \cos x)^2}{2(1 + \cos x)} - 1$$

- a)  $\sin x$
- b)  $-\sin x$
- c)  $\cos x$
- d)  $-\cos x$
- e) 1

#### 6. Simplificar:

$$L = \frac{(\sec^2 x + \csc^2 x)}{\tan x + \cot x} \cdot \sin x$$

- a)  $\sin x$
- b)  $\csc x$
- c)  $\cos x$
- d)  $\sec x$
- e)  $\tan x$

#### 7. Halla "x", si:

$$(\sec x \cdot \csc x - \tan x) \sin x = \frac{1}{2}$$

- a)  $30^\circ$
- b)  $37^\circ$
- c)  $45^\circ$
- d)  $53^\circ$
- e)  $60^\circ$

#### 8. Simplifica:

$$C = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$$

- a)  $1/3$
- b)  $2/3$
- c)  $-2/3$
- d)  $-3/2$
- e)  $3/2$

### UNMSM

9. Si  $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$

Determina:

$$N = (1 + \sin x)(1 - \cos x)$$

- a)  $2/9$
- b)  $4/9$
- c)  $2/3$
- d)  $8/9$
- e)  $10/9$

10. Si:  $\sec^2 x + \csc^2 x = 64$

(x: agudo)

Calcula:  $M = \sqrt[3]{\tan x + \cot x}$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d)
- e)

11. Si  $\tan x + \cot x = 3$ , calcula:

$$J = (\sin x + \cos x)^2$$

- a)  $3/2$
- b)  $1/2$
- c)  $2/3$
- d)  $4/5$
- e)  $5/3$

12. Si:  $\tan x + \cot x = 3$ , calcula:

$$N = \sec x - \csc x$$

- a) 3
- b) 6
- c)  $\sqrt{6}$
- d)  $\sqrt{3}$
- e)  $2\sqrt{3}$

UNI

13. Si:  $\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x = \frac{1}{3}$

Calcula:

$$N = \text{Tan}x \cdot \text{Sen}^2x + \text{Cot}x \cdot \text{Cos}^2x$$

- a)  $\frac{1}{3}$     b)  $\frac{2}{3}$     c)  $\frac{4}{3}$   
d)  $\frac{5}{3}$     e)  $\frac{7}{3}$

14. Simplifica:

$$Q = \sqrt{\frac{2(1 + \text{Cos}x)}{1 - \text{Sen}x}} - \frac{\text{Cos}x}{1 - \text{Sen}x}$$

( $x \in \text{IVC}$ )

- a) 0  
b) 1  
c) -1  
d)  $\text{Sen}x$   
e)  $\text{Cos}x$

15. Si  $\text{Tan}x + \text{Cot}x = \sqrt{6}$

Calcula:  $M = \text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x$

- a)  $\frac{1}{3}$   
b)  $\frac{2}{3}$   
c)  $\frac{1}{4}$   
d)  $\frac{1}{2}$   
e)  $\frac{3}{4}$



# ÁNGULOS COMPUESTOS I

## Capítulo 15

Básicamente la utilidad de estas identidades radica en que con ellas se pueden calcular razones trigonométricas de ángulos desconocidos a partir de ángulos cuyas razones sean conocidas. Si deseo calcular el  $\text{Sen}67^\circ$  simplemente bastará con descomponer el ángulo como  $\text{Sen}(30^\circ + 37^\circ)$  y aplicar la definición.

I. Seno de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

$$\begin{aligned}\text{Sen}(\alpha + \theta) &= \text{Sen}\alpha \text{Cos}\theta + \text{Cos}\alpha \text{Sen}\theta \\ \text{Sen}(\alpha - \theta) &= \text{Sen}\alpha \text{Cos}\theta - \text{Cos}\alpha \text{Sen}\theta\end{aligned}$$

II. Coseno de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

$$\begin{aligned}\text{Cos}(\alpha + \theta) &= \text{Cos}\alpha \text{Cos}\theta - \text{Sen}\alpha \text{Sen}\theta \\ \text{Cos}(\alpha - \theta) &= \text{Cos}\alpha \text{Cos}\theta + \text{Sen}\alpha \text{Sen}\theta\end{aligned}$$

III. Tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

$$\begin{aligned}\text{Tan}(\alpha + \theta) &= \frac{\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\theta}{1 - \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\theta} \\ \text{Tan}(\alpha - \theta) &= \frac{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}\theta}{1 + \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\theta}\end{aligned}$$

### Aplicación

Calcula aproximadamente  $\text{Sen}67^\circ$ .

$$\text{Sen}67^\circ = \text{Sen}(30^\circ + 37^\circ)$$

$$\text{Sen}67^\circ = \text{Sen}30^\circ \text{Cos}37^\circ + \text{Cos}30^\circ \text{Sen}37^\circ$$

$$\text{Sen}67^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\therefore \text{Sen}67^\circ = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Calcula  $A = \text{Sen}75^\circ$
2. Calcula  $B = \text{Tan}8^\circ$
3. Calcula el equivalente de:  
 $J = \text{Sen}3^\circ \text{Cos}34^\circ + \text{Cos}3^\circ \text{Sen}34^\circ$

### PUCP

4. Reduce la siguiente expresión:

$$\frac{\text{Cos}(x + y) + \text{Sen}x \text{Sen}y}{\text{Cos}x \text{Sen}y}$$

Resolución:

$$A = \frac{\text{Cos}x \text{Cos}y - \text{Sen}x \text{Sen}y + \text{Sen}x \text{Sen}y}{\text{Cos}x \text{Sen}y}$$

$$A = \frac{\cancel{\text{Cos}x} \text{Cos}y}{\cancel{\text{Cos}x} \text{Sen}y} \Rightarrow A = \frac{\text{Cos}y}{\text{Sen}y}$$

$$\therefore A = \text{Cot}y$$

5. Reduce:

$$A = \frac{\text{Sen}(x + y) + \text{Sen}(x - y)}{\text{Cos}(x - y) - \text{Cos}(x + y)}$$

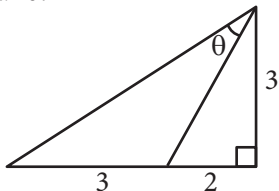
6. Si  $\text{Tan}(2\alpha - \beta) = 3$  y  $\text{Tan}(2\beta - \alpha) = -2$   
Calcula  $\text{Tan}(\alpha + \beta)$

7. Calcula «m»

$$\text{Si: } m \text{Tan}50^\circ = \text{Tan}70^\circ - \text{Tan}20^\circ$$

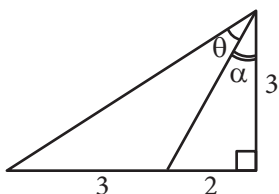
UNMSM

8. Calcula:  $\tan \theta$ .



Resolución:

De la figura,  $\tan(\theta + \alpha) = \frac{5}{3} \wedge \tan \alpha = \frac{2}{3}$



$$\frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \frac{5}{3}$$

$$3 \tan \theta + 3 \tan \alpha = 5 - 5 \tan \theta \tan \alpha$$

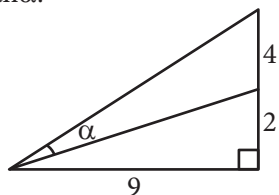
$$3 \tan \theta + 3 \left( \frac{2}{3} \right) = 5 - 5 \tan \theta \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$9 \tan \theta + 6 = 15 - 10 \tan \theta$$

$$19 \tan \theta = 9$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{9}{19}$$

9. Calcula  $\tan \alpha$ .



10. Calcula:

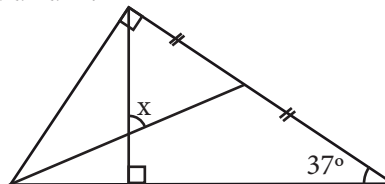
$$E = \frac{\sqrt{3} \sin 50^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 25^\circ - \cos 25^\circ}$$

11. Calcula:

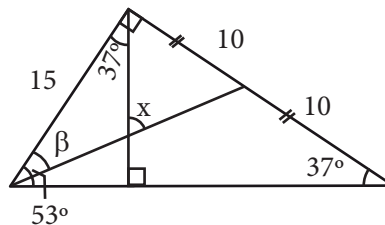
$$M = \frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{\tan 10^\circ}$$

UNI

12. Calcula  $\tan x$ .



Resolución:



De la figura:

$$x = 37^\circ + \beta \wedge \tan \beta = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\tan x = \tan(37^\circ + \beta)$$

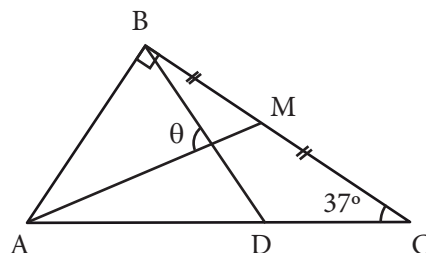
$$\tan x = \frac{\tan 37^\circ + \tan \beta}{1 - \tan 37^\circ \tan \beta}$$

$$\tan x = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{2}{3} \right)}$$

$$\tan x = \frac{\frac{17}{8}}{\frac{6}{8}}$$

$$\tan x = \frac{17}{8}$$

13. Calcula  $\tan \theta$ , si  $\overline{AD} = 2\overline{DC}$



14. Si:

$$\sin 4 + \cos 3 = x$$

$$\sin 3 - \cos 4 = y$$

Calcula  $\sin 1$

## Sigo practicando

16. Calcula  $\cos 15^\circ$ .

- a)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$       e)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$   
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       d)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

17. Calcula  $\tan 82^\circ$ .

- a) 1      c)  $\frac{1}{4}$       e)  $\frac{1}{7}$   
 b) 4      d) 7

18. Indica el valor de:

- $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$   
 a)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{3}{5}$       e) 1  
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       d)  $\frac{4}{5}$

19. Reduce:

- $M = \sin(60^\circ + x) - \sin(60^\circ - x)$   
 a)  $-\sin x$       c)  $\sqrt{3} \cos x$       e)  $\sqrt{3} \sin x$   
 b)  $\cos x$       d)  $\sin x$

20. Si  $\tan(4x - 3y) = -3$ 

$$\tan(4y - 3x) = -2$$

Calcula  $\tan(x + y)$ 

- a) -1      c) 2      e) -5  
 b) 1      d) -2

21. Calcula «x» si:

$$x \tan 70^\circ = \tan 80^\circ - \tan 10^\circ$$

- a) 0      c) -1      e) -2  
 b) 1      d) 2

22. Si  $\text{Tan}\alpha = 3 \wedge \text{Tan}\theta = 2$

Calcula:  $M = \frac{\text{Tan}(\alpha + \theta)}{\text{Tan}(\alpha - \theta)}$

- a)  $\frac{1}{7}$       c)  $-7$       e)  $7$   
 b)  $-\frac{1}{7}$       d)  $\frac{2}{7}$

23. Simplifica:

$M = \frac{\text{Cos}(30^\circ + x) + \text{Cos}(30^\circ - x)}{\text{Cos}x}$

- a)  $\sqrt{3}$       c)  $\sqrt{3}\text{Cos}x$       e)  $\text{Tan}x$   
 b)  $\sqrt{3}\text{Tan}x$       d)  $\sqrt{3}\text{Sen}x$

24. Indica un valor de «x», si:

$\text{Sen}x + \text{Cos}x = \sqrt{2}$

- a)  $5^\circ$       c)  $25^\circ$       e)  $45^\circ$   
 b)  $15^\circ$       d)  $35^\circ$

## Esquema formulario

I. Seno de la suma y de la diferencia de dos ángulos

$$\begin{aligned}\text{Sen}(\alpha + \theta) &= \text{Sen}\alpha\text{Cos}\theta + \text{Cos}\alpha\text{Sen}\theta \\ \text{Sen}(\alpha - \theta) &= \text{Sen}\alpha\text{Cos}\theta - \text{Cos}\alpha\text{Sen}\theta\end{aligned}$$

II. Coseno de la suma y de la diferencia de dos ángulos

$$\begin{aligned}\text{Cos}(\alpha + \theta) &= \text{Cos}\alpha\text{Cos}\theta - \text{Sen}\alpha\text{Sen}\theta \\ \text{Cos}(\alpha - \theta) &= \text{Cos}\alpha\text{Cos}\theta + \text{Sen}\alpha\text{Sen}\theta\end{aligned}$$

III. Tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

$$\begin{aligned}\text{Tan}(\alpha + \theta) &= \frac{\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\theta}{1 - \text{Tan}\alpha\cdot\text{Tan}\theta} \\ \text{Tan}(\alpha - \theta) &= \frac{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}\theta}{1 + \text{Tan}\alpha\cdot\text{Tan}\theta}\end{aligned}$$

## Tarea

### Integral

- Determina  $\text{Sen}15^\circ$ .  
 a)  $\frac{1}{2}$                       c)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                       e)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$   
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Calcula  $\text{Cot}8^\circ$ .  
 a) 1                              c) 5                              e) 9  
 b) 3                              d) 7
- Calcula el equivalente de:  
 $\text{Sen}20^\circ\text{Cos}10^\circ + \text{Cos}20^\circ\text{Sen}10^\circ$   
 a) 1                              c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                               e)  $\frac{1}{4}$   
 b)  $\frac{1}{2}$                               d) 2
- Si  $\text{Tan}x = 2 \wedge \text{Tan}y = 3$   
 Calcula  $\text{Tan}(x - y)$   
 a)  $\frac{1}{7}$                               c) 7                              e) 1  
 b)  $-\frac{1}{7}$                               d) -7

### PUCP

- Si:  $\text{Tan}(3\alpha - 2\theta) = 2$   
 $\text{Tan}(3\theta - 2\alpha) = 3$   
 Determina  $\text{Tan}(\alpha + \theta)$ .  
 a) -1                              c) 2                              e) 3  
 b) 1                              d) -2
- Calcula «z», si:  
 $z\text{Tan}10^\circ = \text{Tan}50^\circ - \text{Tan}40^\circ$   
 a)  $\frac{1}{2}$                               c) 2                              e) 1  
 b)  $-\frac{1}{2}$                               d) -2

- Calcula  $2\text{Sen}70^\circ\text{Cos}10^\circ - \text{Sen}80^\circ$   
 a)  $\frac{1}{2}$                               c) 1                              e) 2  
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                               d)  $\sqrt{3}$

- Si ABCD es un cuadrado, calcula  $\text{Tan}\theta$ .

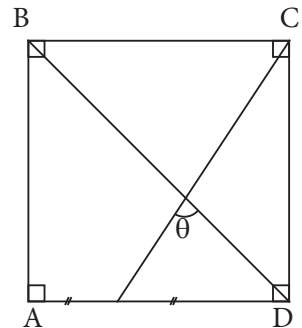
a)  $\frac{3}{4}$

b)  $\frac{4}{3}$

c)  $\frac{1}{7}$

d) 7

e) 3



### UNMSM

- Determina un valor de «x», si:  
 $\sqrt{3}\text{Sen}x + \text{Cos}x = 2$   
 a)  $15^\circ$                               c)  $45^\circ$                               e)  $75^\circ$   
 b)  $30^\circ$                               d)  $60^\circ$

- Calcula:

$$\frac{\text{Tan}70^\circ - \text{Tan}20^\circ}{\text{Tan}50^\circ}$$

a) 1

b) -1

c) 2

d) -2

e)  $\frac{1}{2}$

- Calcula:

$$\text{Sen}(15^\circ + x)\text{Cos}(30^\circ - x) + \text{Cos}(15^\circ + x)\text{Sen}(30^\circ - x)$$

a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b)  $\frac{1}{2}$

c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d)  $\frac{3}{4}$

e) 1

12. Si:  $\alpha + \theta = 45^\circ$  y  $\tan \alpha = 4$

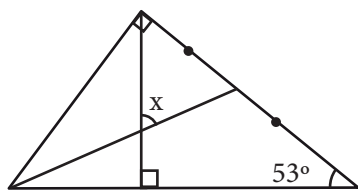
Calcula  $\tan \theta$ .

- a)  $-\frac{3}{4}$       c)  $-\frac{3}{5}$       e)  $-\frac{1}{3}$   
 b)  $-\frac{1}{2}$       d)  $-\frac{4}{3}$

UNI

13. Calcula  $\tan x$ .

- a)  $\frac{3}{7}$   
 b)  $\frac{41}{12}$   
 c)  $\frac{4}{9}$   
 d)  $\frac{11}{13}$   
 e) 2



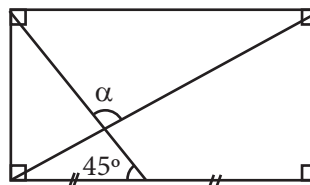
14. Si  $\sin \alpha + \cos \theta = a$

$$\sin \theta - \cos \alpha = b$$

Obtén el valor de  $\sin(\alpha - \theta)$ .

- a)  $ab$       c)  $\frac{1}{ab}$       e)  $a^2 - b^2$   
 b)  $(ab)^2$       d)  $\frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$

15. Calcula  $\tan \alpha$ .



- a) 2      c) 12      e) -3  
 b) 6      d) 18



# ÁNGULOS COMPUESTOS II

## Capítulo 16

### Propiedades

I. Si:

$$K = A \cdot \text{Sen}x \pm B \cdot \text{Cos}x$$

$$K_{\text{máx}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow K_{\text{mín.}} = -\sqrt{A^2 + B^2}$$

Por ejemplo:

$$E = 3\text{Sen}x + 4\text{Cos}x$$

$$E_{\text{máx.}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\Rightarrow E_{\text{mín}} = -\sqrt{3^2 + 4^2} = -5$$

$$Q = \sqrt{2}\text{Sen}x - \sqrt{7}\text{Cos}x$$

$$Q_{\text{máx.}} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{7}^2} = 3$$

$$\Rightarrow Q_{\text{mín.}} = -\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{7}^2} = -3$$

II.  $\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta \cdot \text{Tan}(\alpha + \beta) = \text{Tan}(\alpha + \beta)$

$$\text{Tan}12^\circ + \text{Tan}14^\circ + \text{Tan}12^\circ \cdot \text{Tan}14^\circ \cdot \text{Tan}26^\circ = \text{Tan}26^\circ$$

$$12^\circ + 14^\circ$$

$$\text{Tan}2x + \text{Tan}3x + \text{Tan}2x \cdot \text{Tan}3x \cdot \text{Tan}5x = \text{Tan}5x$$

$$2x + 3x$$

III.

Si:  $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \vee 180^\circ n$ ; ( $n \in \mathbb{Z}$ )

$$1) \text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\theta = \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta \cdot \text{Tan}\theta$$

$\Rightarrow$

$$2) \text{Cot}\alpha \cdot \text{Cot}\beta + \text{Cot}\alpha \cdot \text{Cot}\theta + \text{Cot}\beta \cdot \text{Cot}\theta = 1$$

$$\text{Tan}40^\circ + \text{Tan}80^\circ + \text{Tan}60^\circ = \text{Tan}40^\circ \cdot \text{Tan}80^\circ \cdot \text{Tan}60^\circ$$

$$(40^\circ + 80^\circ + 60^\circ = 180^\circ)$$

$$\text{Cot}20^\circ \cdot \text{Cot}60^\circ + \text{Cot}60^\circ \cdot \text{Cot}100^\circ + \text{Cot}100^\circ \cdot \text{Cot}20^\circ = 1$$

$$(20^\circ + 60^\circ + 100^\circ = 180^\circ)$$

IV.

$$\text{Si } x + y + z = 90^\circ \vee (2n + 1)\frac{\pi}{2}; (n \in \mathbb{Z})$$

$$1) \cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$$

$$2) \tan x \cdot \tan y + \tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet \cot 20^\circ + \cot 60^\circ + \cot 10^\circ &= \cot 20^\circ \cdot \cot 60^\circ \cdot \cot 10^\circ \\ (20^\circ + 60^\circ + 10^\circ &= 90^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \tan 20^\circ \cdot \tan 42^\circ + \tan 42^\circ \cdot \tan 28^\circ + \tan 28^\circ \cdot \tan 20^\circ &= 1 \\ (20^\circ + 42^\circ + 28^\circ &= 90^\circ) \end{aligned}$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Calcula el mínimo valor de:

$$P = 5\sin x - 12\cos x + 7$$

2. Encuentra el valor de «x» si:

$$\tan x + \tan 2x + \tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x = \sqrt{3}$$

3. En un triángulo ABC, simplifica:

$$Q = \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B}$$

### PUCP

4. Reduce:

$$Q = 3 + \tan 23^\circ + \tan 22^\circ + \tan 23^\circ \cdot \tan 22^\circ$$

Resolución:

$$Q = 3 + \tan 23^\circ + \tan 22^\circ + \tan 23^\circ \cdot \tan 22^\circ \cdot (1)$$

$$(23^\circ + 22^\circ)$$

$$Q = 3 + \tan 23^\circ + \tan 22^\circ + \tan 23^\circ \cdot \tan 22^\circ \cdot \tan 45^\circ$$

$$Q = 3 + \tan 45^\circ$$

$$Q = 3 + 1$$

$$Q = 4$$

5. Calcula:

$$N = \frac{\tan 32^\circ + \tan 28^\circ + \sqrt{3} \tan 32^\circ \cdot \tan 28^\circ}{\cot 60^\circ}$$

6. En un triángulo ABC  $\tan A = 1$  y  $\tan B = 2$ . Calcula  $\tan C$ .

7. En un triángulo ABC  $\tan A + \tan C = 3\tan B$ . Obtén el valor de  $E = \tan A \cdot \tan C$ .

### UNMSM

8. En un triángulo ABC, simplifica:

$$R = \frac{\cot A + 2\tan B}{\tan B} + \frac{\cot B + 3\tan C}{\tan C} + \frac{\cot C + \tan A}{\tan A}$$

Resolución:

$$R = \frac{\cot A}{\tan B} + \frac{2\tan B}{\tan B} + \frac{\cot B}{\tan C} + \frac{3\tan C}{\tan C} + \frac{\cot C}{\tan A} + \frac{\tan A}{\tan A}$$

$$R = \cot A \cdot \cot B + 2 + \cot B \cdot \cot C + 3 + \cot C \cdot \cot A + 1$$

$$R = (\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A) + 6$$

$$R = 1 + 6$$

$$R = 7$$

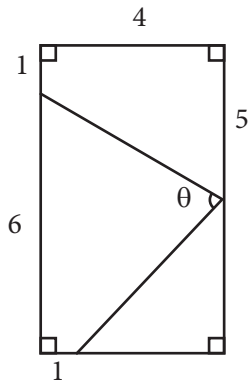
9. Si  $\alpha + \theta + \beta = 180^\circ$ , calcula:

$$E = \frac{\cot \alpha + 6\tan \theta}{\tan \theta} + \frac{\cot \theta + 5\tan \beta}{\tan \beta} + \frac{\cot \beta + 4\tan \alpha}{\tan \alpha}$$

10. Calcula:

$$N = 4 + \tan^2 10^\circ + 2\tan 70^\circ \cdot \tan 10^\circ$$

11. Calcula  $\cot\theta$ .



UNI

12. Señala el mayor valor de:

$$Q = 2\sqrt{2} \sin(45^\circ + x) + \cos x$$

**Resolución:**

$$Q = 2\sqrt{2}(\sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x) + \cos x$$

$$Q = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) + \cos x$$

$$Q = (2\cos x + 2\sin x) + \cos x$$

$$Q = 2\sin x + 3\cos x$$

$$Q_{\max} = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$Q_{\max} = \sqrt{13}$$

13. Calcula el mínimo valor de:

$$Q = 5\cos(37^\circ + x) + \sin x$$

14. Si  $\sin(z + w) = \frac{6}{\sqrt{85}} \wedge \cos(x + y) = \frac{5}{\sqrt{34}}$

Determina:

$$E = \frac{5\tan x + 5\tan y + 3\tan x \cdot \tan y}{7\tan w + 7\tan z + 6\tan w \cdot \tan z}$$

## Advertencia pre

$$\frac{\sin(x + y)}{\sin x \cdot \sin y} = \cot x + \cot y$$

$$\frac{\sin(x - y)}{\sin x \cdot \sin y} = \cot y - \cot x$$

$$\frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y} = \tan x + \tan y$$

$$\frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y} = \tan x - \tan y$$

## Esquema formulario

I. Si:

$$K = A \cdot \sin x \pm B \cdot \cos x$$

$$K_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow K_{\min} = -\sqrt{A^2 + B^2}$$

IV. Si  $x + y + z = 90^\circ \vee (2n + 1)\frac{\pi}{3}; (n \in \mathbb{Z})$

1)  $\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$

2)  $\tan x \cdot \tan y + \tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z = 1$

II.  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan(\alpha + \beta) = \tan(\alpha + \beta)$

III. Si:  $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \vee 180^\circ n; (n \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$  1)  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \theta$

2)  $\cot \alpha \cdot \cot \beta + \cot \alpha \cdot \cot \theta + \cot \beta \cdot \cot \theta = 1$

# Sigo practicando

16. Indica el mínimo valor de:

$$L = \sqrt{3}\text{Sen}x - \text{Cos}x + 2$$

- a) -4                      c) -2                      e) 0  
b) -3                      d) -1

17. Indica un valor de «x» si:

$$\text{Tan}7x + \text{Tan}3x + \text{Tan}7x \text{ Tan}3x \text{ Tan}10x = \sqrt{3}$$

- a) 2°                      c) 6°                      e) 10°  
b) 4°                      d) 8°

18. En un triángulo ABC, simplifica:

$$Q = \frac{(\text{Tan}A + \text{Tan}B + \text{Tan}C)^2}{\text{Tan}^2B \cdot \text{Tan}^2C}$$

- a) 1                      c)  $\text{Tan}^2A$                       e)  $\text{Tan}^2C$   
b) 0                      d)  $\text{Tan}^2B$

19. Dado un triángulo ABC,  $\text{Cot}A = 3$  y  $\text{Cot}B = 2$ .  
Calcula  $\text{Cot}C$ .

- a) -2                      c) -1                      e) 2  
b) -3                      d) 1

20. En un triángulo ABC se cumple:

$$\text{Tan}A = 2 \text{ y } \text{Tan}B = 3$$

Calcula  $\text{Tan}C$

- a) 1                      c) -1/2                      e) 3  
b) -1/4                      d) 7

21. En un  $\Delta ABC$  se cumple:

$$\text{Tan}A + \text{Tan}B + \text{Tan}C = 11\text{Tan}C$$

Calcula:  $\text{Tan}A \text{ Tan}B$

- a) 9                      c) 11                      e) 7  
b) 10                      d) 8

22. Dada la siguiente igualdad:

$$\tan 80^\circ + \tan 70^\circ + \tan 30^\circ = k \tan 80^\circ \tan 70^\circ$$

Calcula  $C = k + \csc 60^\circ$

- a)  $\sqrt{3}$       c)  $3\sqrt{3}$       e)  $4\sqrt{3}/3$   
b)  $2\sqrt{3}$       d)  $\sqrt{3}/3$

23. Si  $A + B + C = \pi$ , calcula la siguiente expresión:

$$E = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} - \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

- a) 0      c) -1      e) -2  
b) 1      d) 2

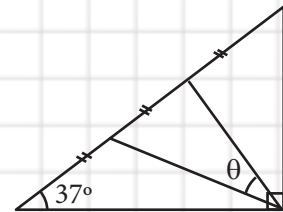
24. Calcula:

$$M = 2 + \tan^2 5^\circ + 2 \tan 80^\circ \tan 5^\circ$$

- a) 0      c) 2      e) 4  
b) 1      d) 3

25. Determina  $\cot \theta$ .

- a) 1  
b) 2  
c) 3  
d) 11/12  
e) 25/18



## Tarea

### Integral

- Halla el mínimo valor de:  
 $N = 3\text{Sen}x - 4\text{Cos}x + 7$   
 a) 1                      c) 3                      e) 5  
 b) 2                      d) 4
- Encuentra un valor de «x» si:  
 $\text{Tan}3x + \text{Tan}2x + \text{Tan}3x\text{Tan}2x\text{Tan}5x = 1$   
 a)  $1^\circ$                       c)  $5^\circ$                       e)  $9^\circ$   
 b)  $3^\circ$                       d)  $7^\circ$
- En un triángulo ABC, reduce:  
 $Q = \text{Tan}A + \text{Tan}B + \text{Tan}C - \text{Tan}A\text{Tan}B\text{Tan}C$   
 a) 0                      c) -1                      e)  $\text{Tan}^2B$   
 b) 1                      d)  $\text{Tan}^2A$
- Señala el valor máximo de:  
 $Q = 5\text{Sen}x + 4\text{Cos}x$   
 a)  $\sqrt{41}$                       c) 1                      e)  $\sqrt{7}$   
 b)  $\sqrt{37}$                       d) 3

### PUCP

- En un triángulo ABC;  $\text{Tan}A = \frac{1}{2}$  y  $\text{Tan}B = \frac{1}{3}$ ,  
 calcula  $\text{Tan}C$ .  
 a)  $-\frac{1}{6}$                       c) -1                      e) 3  
 b)  $-\frac{1}{5}$                       d) 2
- En un  $\Delta ABC$ ;  $\text{Tan}A + \text{Tan}B = 4\text{Tan}C$ ,  
 calcula  $\text{Tan}A \text{ Tan}B$ .  
 a) 1                      c) 3                      e) 3  
 b) 2                      d) 4
- Calcula el valor de K si:  
 $\text{Cot}60^\circ + \text{Cot}20^\circ + \text{Cot}10^\circ = K\text{Cot}20^\circ\text{Cot}10^\circ$

a) 1                      c) 3                      e)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) 2                      d)  $\sqrt{3}$

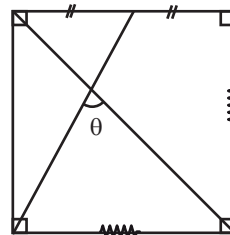
- Reduce:  
 $T = \text{Tan}17^\circ + \text{Tan}5^\circ + \text{Tan}17^\circ\text{Tan}22^\circ\text{Tan}5^\circ$   
 a) 0                      c)  $\text{Tan}5^\circ$                       e)  $\text{Tan}27^\circ$   
 b)  $\text{Tan}17^\circ$                       d)  $\text{Tan}22^\circ$

### UNMSM

- Calcula:  
 $P = 3 + \text{Tan}^220^\circ + 2\text{Tan}50^\circ\text{Tan}20^\circ$   
 a) 1                      c) 3                      e) 5  
 b) 2                      d) 4

- Calcula  $\text{Tan}\theta$

- a) 1  
b) 2  
c) 3  
d) 4  
e) 5



- En un triángulo ABC se cumple:

$\text{Cot}A \text{ Cot}B + \text{Cot}A \text{ Cot}C = \frac{1}{4}$   
 Calcula  $\text{Cot}B \text{ Cot}C$   
 a)  $\frac{3}{2}$                       c)  $\frac{3}{4}$                       e)  $\frac{5}{4}$   
 b)  $\frac{2}{3}$                       d)  $\frac{4}{3}$

- Calcula:

$$\frac{\text{Tan}20^\circ + 2\text{Tan}80^\circ}{\text{Tan}^280^\circ}$$

- a)  $\text{Tan}20^\circ$                       c) 2                      e)  $2\sqrt{3}$   
 b)  $\sqrt{3}$                       d)  $\text{Tan}40^\circ$

## UNI

13. Señala el mayor valor de:

$$L = 5\text{Sen}(53^\circ + x) - 2\text{Sen}x$$

- a)  $\sqrt{7}$                       c)  $\sqrt{13}$                       e)  $\sqrt{17}$   
 b)  $\sqrt{11}$                       d)  $\sqrt{15}$

14. Determina:

$$E = \frac{4\tan 20^\circ + 4\tan 17^\circ + 3\tan 20^\circ \tan 17^\circ}{\sqrt{3}\tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ + 3\tan 40^\circ \tan 20^\circ}$$

- a)  $\frac{3}{4}$                       c) 1                      e)  $\frac{16}{9}$   
 b)  $\frac{4}{3}$                       d)  $\frac{9}{16}$

15. Señala el mayor valor de:

$$N = \text{Sen}(x + y) + \sqrt{3}\text{Cos}(x + y)$$

- a) 0                      c) -1                      e) -2  
 b) 1                      d) 2



# ÁNGULO DOBLE

## Capítulo

17

El objeto de estas igualdades es expresar razones trigonométricas del ángulo doble ( $2\alpha$ ;  $2\theta$ ; ...;  $2x$ ) en términos de las razones trigonométricas del ángulo simple ( $\alpha$ ,  $\theta$ , ...  $x$ ); estas igualdades serán válidas para todos los valores admisibles de sus variables.

### Identidades fundamentales

$$\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x \text{ Cos}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x} \quad \forall x \neq \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{4}; (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\} \quad n \in \mathbb{Z}$$

### Demostración de las identidades fundamentales

Demostración de  $\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x \text{ Cos}x$

Sabemos lo siguiente:

$$\text{Sen}(\alpha + \theta) = \text{Sen}\alpha \text{ Cos}\theta + \text{Sen}\theta \text{ Cos}\alpha$$

Operando:  $\alpha = x \wedge \theta = x$

Obtenemos:

$$\text{Sen}(\underbrace{x+x}_{2x}) = \text{Sen}x \text{ Cos}x + \text{Cos}x \text{ Sen}x$$

$$\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x \text{ Cos}x$$

Demostración de  $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

Sabemos lo siguiente:

$$\text{Cos}(\alpha + \theta) = \text{Cos}\alpha \text{ Cos}\theta - \text{Sen}\alpha \text{ Sen}\theta$$

Operando:  $\alpha = x \wedge \theta = x$

Obtiene:

$$\text{Cos}(\underbrace{x+x}_{2x}) = \text{Cos}x \text{ Cos}x - \text{Sen}x \text{ Sen}x$$

$$\therefore \text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$$

$$\text{Demostración de } \text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

$$\text{Sabemos: } \text{Tan}(\alpha + \theta) = \frac{\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\theta}{1 - \text{Tan}\alpha \text{ Tan}\theta}$$

Operando:  $x = x \wedge \theta = x$

Obtenemos:  $\text{Tan}(x + x) =$

$$\text{Tan}2x = \text{Tan}(\underbrace{x+x}_{2x}) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}x}{1 - \text{Tan}x \text{ Tan}x}$$

$$\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

### Advertencia pre

Con la ayuda de la identidad  $\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1$  se puede expresar el coseno del ángulo doble ( $\text{Cos}2x$ ), ya sea en función del seno o del coseno del ángulo simple ( $\text{Sen}x$  o  $\text{Cos}x$ ), para ello procederemos del siguiente modo:

Sabemos que  $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

Pero  $\text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x$

$$\Rightarrow \text{Cos}2x = (1 - \text{Sen}^2x) - \text{Sen}^2x$$

$$\therefore \text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$

Sabemos que:  $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

Pero  $\text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x$

$$\Rightarrow \text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - (1 - \text{Cos}^2x)$$

$$\therefore \text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Calcula el valor de:  

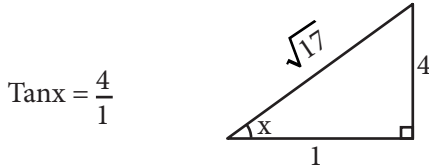
$$L = 2\text{Sen}15^\circ\text{Cos}15^\circ + \frac{2\tan 22,5^\circ}{1 - \tan^2 22,5^\circ},$$
2. Reduce:  

$$\text{Cos}^2 4\theta - \text{Sen}^2 4\theta + 2\text{Sen}5\theta \cdot \text{Cos}5\theta - \text{Cos}8\theta$$
3. Indica el valor de «x», si se cumple:  

$$\frac{\text{Sen}2x}{\text{Cos}x} = 1 \wedge x \in (0^\circ; 90^\circ)$$

### PUCP

4. Si  $\text{Tan}x = 4$  (x: agudo), calcula  $\text{Cos}2x$ .  
**Resolución:**



Piden:  $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2 x - \text{Sen}^2 x$

$$\text{Cos}2x = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2$$

$$\text{Cos}2x = \frac{-15}{17}$$

5. Si  $\text{Tan}x = 0,3333\dots$  (x: agudo), calcula  $\text{Sen}2x$ .
6. Si  $\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta = 1,2$ . Calcula  $\text{Sen}2\theta$
7. Reduce:  

$$E = \text{Cos}x(\text{Cos}x + \text{Sec}x) - \text{Sen}x(\text{Sen}x + \text{Csc}x)$$

### UNMSM

8. Si:  $\text{Sen}^4 x + \text{Cos}^4 x = A - B\text{Sen}^D(Cx)$   
 Calcula:  $\sqrt{A + B \cdot C + D}$   
**Resolución:**  

$$\text{Sen}^4 x + \text{Cos}^4 x = 1 - 2\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}^2 x$$

$$\text{Sen}^4 x + \text{Cos}^4 x = 1 - 2\left(\frac{2\text{Sen}x\text{Cos}x}{2}\right)^2$$

$$\text{Sen}^4 x + \text{Cos}^4 x = 1 - 2\left(\frac{\text{Sen}2x}{2}\right)^2$$

$$\text{Sen}^4 x + \text{Cos}^4 x = 1 - \frac{1}{2}\text{Sen}^2(2x)$$

$$\rightarrow A = 1$$

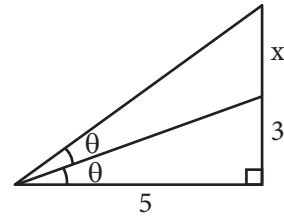
$$B = \frac{1}{2}$$

$$C = 2$$

$$D = 2$$

Piden:  $\sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 2} = 2$

9. Si:  $\text{Sen}^6 x + \text{Cos}^6 x = E - F\text{Sen}^G(Hx)$   
 Calcula:  $\sqrt{E + (G + H)F}$
10. Si  $\text{Tan}x = 5$ , calcula  $\text{Cot}2x$ .
11. Calcula «x».



### UNI

12. Señala el máximo valor de:  

$$D = \text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta \cdot \text{Cos}2\theta \cdot \text{Cos}4\theta \cdot \text{Cos}8\theta$$
**Resolución:**  

$$2D = \frac{2\text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta}{\text{Sen}2\theta} \cdot \text{Cos}2\theta \cdot \text{Cos}4\theta \cdot \text{Cos}8\theta$$

$$2D = \frac{2\text{Sen}2\theta \cdot \text{Cos}2\theta}{\text{Sen}4\theta} \cdot \text{Cos}4\theta \cdot \text{Cos}8\theta$$

$$4D = \frac{2\text{Sen}4\theta \cdot \text{Cos}4\theta}{\text{Sen}8\theta} \cdot \text{Cos}8\theta$$

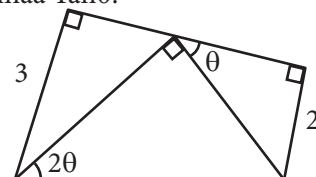
$$8D = \frac{2\text{Sen}8\theta \cdot \text{Cos}8\theta}{\text{Sen}16\theta}$$

$$16D = \frac{\text{Sen}16\theta}{16}$$

$$D_{\text{máx.}} = \frac{(\text{Sen}16\theta)_{\text{máx.}}}{16} = \frac{1}{16}$$

13. Calcula el mínimo valor de:  

$$M = 7\text{Sen}x \cdot \text{Cos}x \cdot \text{Cos}2x \cdot \text{Cos}4x$$
14. Determina  $\text{Tan}\theta$ .



## Sigo practicando

16. Calcula el valor de:

$$L = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- a) 0                      c)  $\sqrt{3}/2$                       e) 1  
b)  $1/2$                       d)  $\sqrt{3}$

17. Reduce:

$$\frac{2\tan 7\theta}{1 - \tan^2 7\theta} + 2\sin 11\theta \cos 11\theta - \tan 14\theta$$

- a)  $\sin 22\theta$                       c)  $\tan 22\theta$                       e) 1  
b)  $\sin 14\theta$                       d)  $\cot 14\theta$

18. Indica un valor de «x», si:

$$\sin 2x = \sqrt{3} \cos x \wedge x \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$$

- a)  $5^\circ$                       c)  $30^\circ$                       e)  $60^\circ$   
b)  $15^\circ$                       d)  $45^\circ$

19. Si  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{7}}$ , calcula  $\tan 2x$ .

- a)  $\sqrt{6}/5$                       c)  $2\sqrt{6}/5$                       e)  $\sqrt{6}$   
b)  $1/5$                       d)  $2\sqrt{3}/5$

20. Si  $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ , calcula  $\cos 2x$ .

- a)  $5\sqrt{2}/9$                       c)  $3\sqrt{2}/8$                       e)  $3\sqrt{2}/9$   
b)  $4\sqrt{2}/9$                       d)  $\sqrt{2}/9$

21. Reduce:

$$Q = 2\sin^3 x \cos x + 2\cos^3 x \sin x$$

- a)  $\sin 2x$                       c)  $\tan 2x$                       e) 0  
b)  $\cos 2x$                       d) 1

22. Si  $\tan x + \cot x = 3$ , calcula  $\cos 2x$ .

- a)  $1/\sqrt{5}$       c)  $\sqrt{5}/2$       e)  $\sqrt{5}/3$   
 b)  $3/\sqrt{5}$       d)  $\sqrt{5}$

24. Si  $\cot x = -\frac{1}{4}$ , calcula  $\tan 2x$ .

- a)  $8/15$       c)  $6/7$       e)  $12/13$   
 b)  $7/13$       d)  $1/5$

23. Si  $\sin 2x = \frac{2}{3}$

Calcula:  $E = \sin^4 x + \cos^4 x$

- a)  $4/9$       c)  $-2/9$       e)  $5/9$   
 b)  $7/9$       d)  $1/9$

25. Calcula «x».

- a)  $7/4$       b)  $5/4$   
 c)  $3/4$       d)  $7/8$   
 e)  $5/8$

## Esquema formulario

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \end{array} \right\}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

## Tarea

### Integral

- Calcula el valor de:  
 $Q = 2\text{Sen}\frac{37^\circ}{2} \text{Cos}\frac{37^\circ}{2} + \text{Cos}^2\frac{53^\circ}{2} - \text{Sen}^2\frac{53^\circ}{2}$   
 a)  $\frac{6}{5}$                       c)  $\frac{3}{4}$                       e)  $\frac{1}{5}$   
 b)  $\frac{7}{5}$                       d)  $\frac{4}{3}$
- Reduce:  
 $\frac{2\text{Tan}2\alpha}{1-\text{Tan}^22\alpha} + 2\text{Sen}3\alpha\text{Cos}3\alpha - \text{Tan}4\alpha$   
 a) 0                      c)  $\text{Sen}6\alpha$                       e)  $\text{Tan}6\alpha$   
 b) 1                      d)  $\text{Cos}6\alpha$
- Indica un valor de «x» si se cumple:  
 $\frac{\text{Sen}2x}{\text{Sen}x} = 1 \wedge x \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$   
 a)  $5^\circ$                       c)  $30^\circ$                       e)  $60^\circ$   
 b)  $15^\circ$                       d)  $45^\circ$
- Si  $\text{Tan}x = \frac{1}{3}$ , calcula  $\text{Sen}2x$   
 a)  $\frac{1}{5}$                       c)  $\frac{4}{5}$                       e)  $\frac{5}{2}$   
 b)  $\frac{3}{5}$                       d)  $\frac{2}{5}$

### PUCP

- Si  $\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta = \sqrt{2}$   
 Calcula  $\text{Sen}2\theta$   
 a) 1                      c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       e)  $\frac{1}{8}$   
 b)  $\frac{1}{2}$                       d)  $\frac{1}{4}$

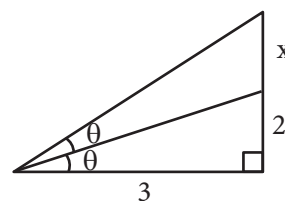
- Reduce:  
 $P = 2\text{Cos}x(3\text{Sec}x + \text{Cos}x) - 2\text{Sen}x(3\text{Csc}x + \text{Sen}x)$   
 a)  $\text{Sen}2x$                       c)  $\text{Tan}2x$                       e) 1  
 b)  $\text{Cos}2x$                       d)  $2\text{Cos}2x$

- Simplifica:  
 $K = \frac{1 - \text{Cos}2\theta}{\text{Sen}2\theta} - \text{Tan}\theta$   
 a)  $-\frac{1}{2}$                       c)  $\text{Sen}\theta$                       e) 0  
 b)  $\frac{1}{2}$                       d)  $\text{Cos}\theta$

- Reduce:  
 $N = (\text{Tan}x + \text{Cot}x)\text{Sen}2x$   
 a) 1                      c) 2                      e)  $\text{Tan}^2x$   
 b) -1                      d) 3

### UNMSM

- Si  $\text{Tan}x = -\frac{2}{3}$ , calcula  $\text{Cot}2x$ .  
 a)  $-\frac{1}{8}$                       c)  $-\frac{5}{12}$                       e)  $-\frac{12}{5}$   
 b)  $\frac{4}{9}$                       d)  $\frac{1}{5}$
- Calcula «x».  
 a)  $\frac{13}{5}$   
 b)  $\frac{26}{5}$   
 c)  $\frac{4}{11}$   
 d)  $\frac{2}{11}$   
 e) 1



11. Indica el equivalente de:

$$\frac{1}{1 - \tan \theta} - \frac{1}{1 + \tan \theta}$$

- a)  $\sec 2\theta$       c)  $\cos 2\theta$       e)  $\tan 2\theta$   
b)  $\sin 2\theta$       d)  $\cot 2\theta$

12. Calcula «m» en la igualdad:

$$\sin 2x \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{\sin(mx)}{m}$$

- a) 4      c) 8      e) 2  
b) 6      d) 3

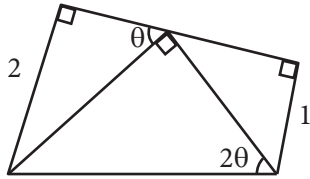
UNI

13. Señala el máximo valor de:

$$A = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha$$

- a) 1      c)  $\frac{1}{4}$       e)  $\frac{1}{8}$   
b)  $\frac{1}{2}$       d)  $\frac{1}{6}$

14. Halla  $\tan^2 \theta$ .



- a) 1      c)  $\frac{1}{3}$       e)  $\frac{1}{5}$   
b)  $\frac{1}{2}$       d)  $\frac{1}{4}$

15. Sabiendo que:

$$3 \sin^2 x + 7 \cos^2 x = a + b \cos 2x$$

Calcula el valor de  $M = 3a - 2b$

- a) 8      c) 11      e) 9  
b) 13      d) 12



# ÁNGULO MITAD

## Capítulo 18

### Introducción

El objetivo de estas igualdades es expresar las razones trigonométricas del ángulo mitad  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\theta}{2}, \dots, \frac{x}{2}\right)$  en función de las razones trigonométricas del ángulo simple  $(\alpha; \beta; \theta; \dots; x)$ . Estas igualdades serán válidas para todos los valores admisibles de sus variables.

### Identidades fundamentales

|                                                                             |                                                                             |                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}x}{2}}$ | $\text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}x}{2}}$ | $\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}x}{1 + \text{Cos}x}}$ |
| $x \in \mathbb{R}$                                                          | $x \in \mathbb{R}$                                                          | $x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}$                |

### Observación

El signo que aparece en los radicales depende del cuadrante en el cual se ubique el ángulo mitad  $\left(\frac{x}{2}\right)$  y la razón que lo afecte; así por ejemplo:

→ Si:  $\left(\frac{x}{2}\right) \in \text{IIC} \Rightarrow \text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)$  tendrá signo (+)

→ Si:  $\left(\frac{x}{2}\right) \in \text{IIC} \Rightarrow \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)$  tendrá signo (-)

→ Si:  $\left(\frac{x}{2}\right) \in \text{IIC} \Rightarrow \text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)$  tendrá signo (-)

### Fórmulas especiales

$$\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{Csc}x - \text{Cot}x$$

$$\text{Cot}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{Csc}x + \text{Cot}x$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Obtén el equivalente de:

$$\sqrt{\frac{1 - \text{Cos}50^\circ}{1 + \text{Cos}50^\circ}} - \text{Tan}25^\circ$$

2. Reduce:

$$\sqrt{1 - \frac{1 + \text{Cos}84^\circ}{2}}$$

3. Si  $\text{Cos}\theta = \frac{1}{6}$ ;  $0^\circ < \theta < 90^\circ$

Calcula:  $\text{Sen}\frac{\theta}{2}$

### PUCP

4. Si  $\text{Cos}\beta = \frac{1}{7}$ ;  $270^\circ < \beta < 360^\circ$

Calcula:  $\text{Cos}\frac{\beta}{2}$

**Resolución:**

$$270^\circ < \beta < 360^\circ$$

$$135^\circ < \frac{\beta}{2} < 180^\circ$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{7}}{2}}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

5. Si  $\cos x = \frac{-1}{5}$ ;  $90^\circ < x < 180^\circ$

Calcula:  $\sin \frac{x}{2}$

6. Si  $\tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

Calcula:  $\cos \frac{\theta}{2}$

7. Obtén el equivalente de:  
 $M = \sec 40^\circ - \tan 40^\circ$

### UNMSM

8. Reduce:  
 $P = \csc 2x + \csc 4x + \csc 8x + \cot 8x$

**Resolución:**

$$P = \csc 2x + \csc 4x + \csc 8x + \cot 8x$$

$$P = \csc 2x + \csc 4x + \cot 4x$$

$$P = \csc 2x + \cot 2x$$

$$P = \cot x$$

9. Reduce:  
 $L = \csc x + \csc 2x + \csc 4x + \csc 8x + \csc 16x + \cot 16x$

10. Si  $\sin \theta = \frac{1}{3}$

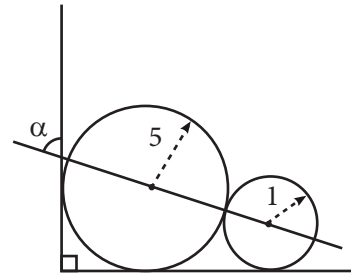
Calcula  $\tan\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$

11. Si:  $\csc \beta = \frac{-6}{\sqrt{11}}$ ;  $180^\circ < \beta < 270^\circ$

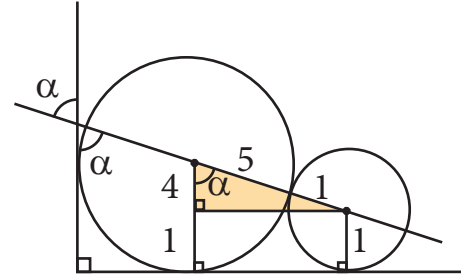
Calcula  $\sin \frac{\beta}{2}$

### UNI

12. Calcula:  $\tan \frac{\alpha}{2}$



**Resolución:**



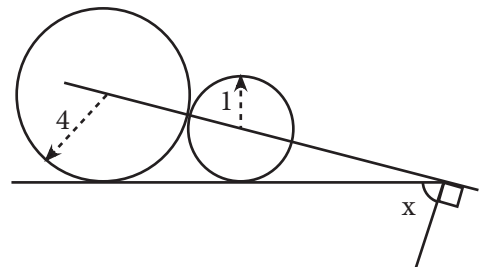
Del gráfico:  $\cos \alpha = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

Piden:  $\tan \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

13. Calcula  $\tan \frac{x}{2}$



14. Si:

$$\csc 2\alpha + \csc 2\beta + \csc 2\theta = \cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\theta$$

Halla:

$$N = \frac{\tan^3 \alpha + \tan^3 \beta + \tan^3 \theta}{\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \theta}$$

# Sigo practicando

16. Obtén el equivalente de:

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 24^\circ}{1 - \cos 24^\circ}} + \cos 12^\circ$$

- a) 1                      c)  $\tan 24^\circ$                       e)  $2 \cot 12^\circ$   
b) 0                      d)  $\cot 12^\circ$

17. Reduce:

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \cos 8^\circ}{2}}}{2}}$$

- a)  $\sin 1^\circ$                       c)  $\cos 1^\circ$                       e)  $\tan 4^\circ$   
b)  $\sin 2^\circ$                       d)  $\cos 2^\circ$

18. Si:  $\cos x = \frac{1}{2}$ , calcula  $\sin \frac{x}{2}$  ( $x \in \text{IC}$ )

- a)  $\frac{1}{2}$                       c) 2                      e)  $-\frac{1}{2}$   
b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       d) -2

19. Calcula  $\tan 15^\circ$ .

- a)  $\sqrt{3} + 1$                       c)  $\sqrt{3} - 1$                       e)  $2 + \sqrt{3}$   
b)  $2 - \sqrt{3}$                       d)  $\sqrt{3} + 2$

20. Si  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ ;  $\alpha \in \text{IC}$ , calcula  $\sin \frac{\alpha}{2}$ .

- a)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$                       c)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$                       e)  $\sqrt{\frac{1}{7}}$   
b)  $\sqrt{\frac{5}{7}}$                       d)  $\sqrt{\frac{1}{5}}$

21. Indica el equivalente de:

$$C = \frac{\sec 10^\circ - \tan 10^\circ}{2 \cot 50^\circ}$$

- a) 2                      c)  $\frac{1}{2}$                       e) 0  
b) -2                      d)  $-\frac{1}{2}$

22. Reduce:

$$L = 1 - \operatorname{Sen} x \operatorname{Tan} \frac{x}{2}$$

- a)  $\operatorname{Sen} \frac{x}{2}$       c)  $\operatorname{Sen} x$       e)  $\operatorname{Tan} x$   
 b)  $\operatorname{Cos} \frac{x}{2}$       d)  $\operatorname{Cos} x$

23. Simplifica:

$$V = \frac{1 + \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sen} x}$$

- a)  $\operatorname{Tan} x$       c)  $\operatorname{Cot} x$       e)  $\operatorname{Tan} \frac{x}{4}$   
 b)  $\operatorname{Tan} \frac{x}{2}$       d)  $\operatorname{Cot} \frac{x}{2}$

24. Si  $\operatorname{Csc} \theta = 4$

$$\text{Calcula: } \operatorname{Tan} \left( 45^\circ - \frac{\theta}{2} \right).$$

- a)  $\sqrt{\frac{1}{2}}$       c)  $\sqrt{\frac{1}{8}}$       e)  $\sqrt{\frac{5}{3}}$   
 b)  $\sqrt{\frac{1}{4}}$       d)  $\sqrt{\frac{3}{5}}$

25. Si  $\operatorname{Sec} \theta = -9$ ;  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

$$\text{Calcula } \operatorname{Tan} \frac{\theta}{2}$$

- a)  $-\sqrt{\frac{5}{4}}$       c)  $-\sqrt{\frac{7}{3}}$       e)  $-\sqrt{\frac{3}{7}}$   
 b)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$       d)  $\sqrt{\frac{1}{5}}$

## Esquema formulario

$$\operatorname{Sen} \left( \frac{x}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} x}{2}}$$

$$\operatorname{Cos} \left( \frac{x}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos} x}{2}}$$

$$\operatorname{Tan} \left( \frac{x}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} x}{1 + \operatorname{Cos} x}}$$

### Fórmulas especiales

$$\operatorname{Tan} \left( \frac{x}{2} \right) = \operatorname{Csc} x - \operatorname{Cot} x$$

$$\operatorname{Cot} \left( \frac{x}{2} \right) = \operatorname{Csc} x + \operatorname{Cot} x$$

## Tarea

### Integral

1. Reduce:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 42^\circ}{1 + \cos 42^\circ}} - \frac{1}{\cot 21^\circ}$$

- a) 1                      c) 0                      e)  $\tan 21^\circ$   
b) -1                      d)  $\tan 84^\circ$

2. Indica el equivalente de:

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{1 + \cos 28^\circ}}{2}}$$

- a) 0                      c)  $\cos 56^\circ$                       e)  $\cos 7^\circ$   
b) 1                      d)  $\sin 56^\circ$

3. Si  $\cos x = -\frac{1}{4}$ ;  $90^\circ < x < 180^\circ$ , calcula  $\sin \frac{x}{2}$ .

- a)  $\sqrt{\frac{1}{8}}$                       c)  $\sqrt{\frac{3}{5}}$                       e)  $\sqrt{\frac{5}{8}}$   
b)  $\sqrt{\frac{1}{4}}$                       d)  $\sqrt{\frac{1}{2}}$

4. Reduce:

$$N = \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}$$

- a)  $2 \tan x$                       c)  $-2 \cot x$                       e) 2  
b)  $-2 \tan x$                       d)  $2 \cot x$

### PUCP

5. Si  $\csc \beta = \frac{-6}{\sqrt{11}}$ ;  $180^\circ < \beta < 270^\circ$

$$\text{Calcula: } \sin \frac{\beta}{2}$$

- a)  $\sqrt{\frac{11}{12}}$                       c)  $\sqrt{\frac{5}{6}}$                       e)  $\sqrt{\frac{6}{7}}$   
b)  $\sqrt{\frac{10}{11}}$                       d)  $\sqrt{\frac{7}{8}}$

6. Obtén el equivalente de:

$$L = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ$$

- a) 0                      c) -1                      e)  $\tan 35^\circ$   
b) 1                      d)  $\cot 35^\circ$

7. Reduce:

$$P = \csc x + \csc 2x + \cot 2x$$

- a)  $\tan \frac{x}{2}$                       c)  $2 \tan \frac{x}{2}$                       e) 1  
b)  $\cot \frac{x}{2}$                       d)  $2 \cot$

8. Calcula:  $\cot 22^\circ 30'$

- a)  $\sqrt{2} + 2$                       c)  $\sqrt{2} + 1$                       e)  $\sqrt{3} - 1$   
b)  $\sqrt{3} + 2$                       d)  $\sqrt{3} + 3$

### UNMSM

9. Reduce:

$$P = \csc \frac{x}{2} + \csc x + \csc 2x + \csc 4x + \csc 8x + \cot 8x$$

- a)  $\csc x$                       c)  $\cot \frac{x}{2}$                       e)  $\cot \frac{x}{8}$   
b)  $\cot x$                       d)  $\cot \frac{x}{4}$

10. Si  $\sin \theta = \frac{1}{5}$

$$\text{Calcula: } \tan \left( 45^\circ + \frac{\theta}{2} \right)$$

- a)  $\sqrt{\frac{1}{1}}$                       c)  $\sqrt{\frac{5}{2}}$                       e)  $\sqrt{\frac{9}{2}}$   
b)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$                       d)  $\sqrt{\frac{7}{2}}$

11. Calcula «x» si:

$$\tan x = \frac{1 + \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}, x \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$$

- a)  $40^\circ$                       c)  $20^\circ$                       e)  $70^\circ$   
b)  $50^\circ$                       d)  $30^\circ$

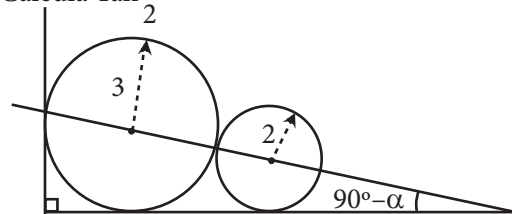
12. Reduce:

$$E = \csc 80^\circ + \csc 40^\circ + \cot 80^\circ$$

- a)  $\frac{1}{2}\cot 20^\circ$                       c)  $\tan 20^\circ$                       e)  $2\cot 20^\circ$   
b)  $\frac{1}{2}\tan 20^\circ$                       d)  $\cot 20^\circ$

UNI

13. Calcula  $\tan \frac{\alpha}{2}$



- a)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$                       c) 1                      e)  $\sqrt{\frac{5}{3}}$   
b)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$                       d)  $\sqrt{\frac{4}{3}}$

14. Si:

$$\csc 2x + \csc 2y + \csc 2z = \cot 2x + \cot 2y + \cot 2z$$

$$\text{Calcula: } S = \frac{\tan x + \tan y}{\tan z}$$

- a) 1                      c) 2                      e)  $-\frac{1}{5}$   
b) -1                      d) -2

15. Simplifica:

$$F = \frac{1 - \tan x \cot \left( \frac{x}{2} \right)}{1 + \tan x \tan \left( \frac{x}{2} \right)}$$

- a) 1                      c)  $\tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)$                       e)  $\cot^2 \left( \frac{x}{2} \right)$   
b) -1                      d)  $-\tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)$

